http://www.waece.org/cdlogicomatematicas/

EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO-MATEMÁTICO

Conferencia de Apertura del **«1º Congreso Mundial de Matemáticas en E. I.»**, organizado por la Asociación Mundial de Educadores Infantiles

José Manuel Serrano González-Tejero

Universidad de Murcia

INTRODUCCIÓN

Cuando hablamos de pensamiento lógico-matemático, en términos generales, se entiende que hacemos referencia a las matemáticas o al conocimiento matemático y, aunque es cierto que las nociones matemáticas suponen una de las posibles formas de pensamiento lógico-matemático, no es menos cierto que este reduccionismo del pensamiento lógico-matemático al conocimiento matemático, es un craso error.

Cualquier epistemología, y la epistemología genética de Jean Piaget no puede sustraerse a ello, se encuentra abocada a considerar el problema de la bipolaridad del conocimiento. En efecto, sabemos que muchas proposiciones alcanzan su valor de verdad o falsedad sin recurso a la constatación empírica y sólo pueden ser alcanzadas por deducción. Por el contrario, podemos encontrar otro gran conjunto de proposiciones en las que esos valores están mediatizados por la posibilidad de constatación empírica de los hechos a los que se refieren y sólo pueden ser alcanzadas por inducción. Este planteamiento parece conducir a una irreductibilidad entre estos dos conjuntos de verdades y cualquier teoría del conocimiento se va a ver abocada a responder al problema entre la relación de estas dos formas de conocimiento: el conocimiento lógico-matemático (verdades normativas) y el conocimiento físico (verdades fácticas).

Para poder dar solución a este problema Piaget postula la necesidad de una continuidad funcional entre la vida y el pensamiento, porque para el eminente epistemólogo suizo "si los problemas biológicos y psicológicos son solidarios, ello se debe a que el conocimiento prolonga, efectivamente, la vida misma, de tal forma que la asimilación biológica… se prolonga en una asimilación intelectual"[1]. Esta continuidad entre lo biológico y lo psicológico queda asegurada por una propiedad intrínseca a todo tipo de organización vital: la acción, mecanismo a través del cual el organismo entra en contacto con el entorno, lo asimila y «actúa» sobre él transformándolo. Ahora bien, como no existe «acción» sin «reacción», Piaget se ve en la necesidad de utilizar el término *interacción* para designar las relaciones entre el individuo y lo real.

En el proceso de interacción sujeto↔objeto tenemos, por tanto, tres elementos (sujeto), (↔) y (objeto). El primer elemento de la terna, es decir, el sujeto, es el conocedor y el conocimiento lo puede extraer del propio sujeto (metacognición), de la interacción con el objeto (cognición o conocimiento lógico-matemático) o del objeto (cognición o conocimiento físico). De esta manera la apropiación de los saberes y de los contenidos específicos de las matemáticas es una forma de conocimiento lógico-matemático, pero, evidentemente, no es la única posible.

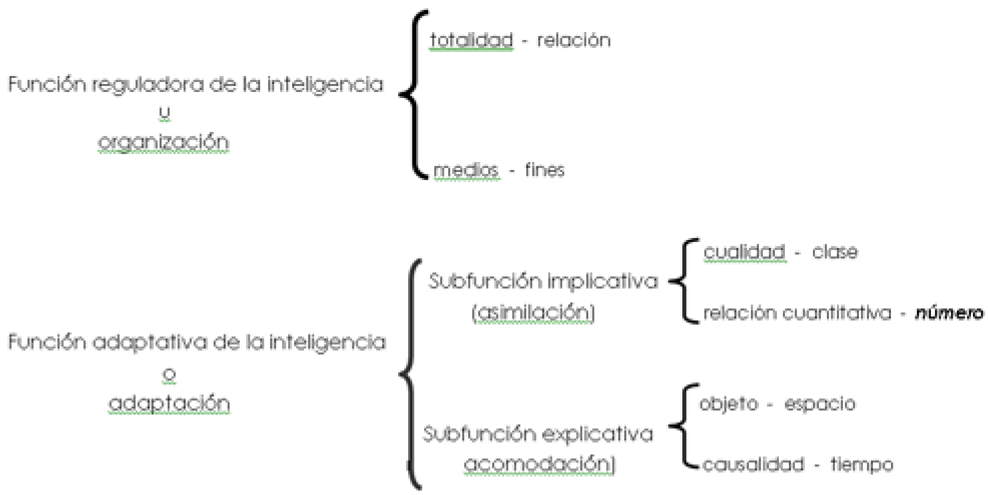
Hecho este breve preámbulo, vamos a comenzar a desarrollar una forma de conocimiento lógico-matemático que conocemos como «aritmética», así como sus relaciones e implicaciones con otra forma de conocimiento lógico-matemático que denominamos «lógica».

Desde que vieron la luz los primeros trabajos piagetianos sobre la construcción del número y, muy especialmente, desde la aparición en 1941 de la *Genèse du nombre chez l'enfant* con la propuesta de la indisociabilidad cardinal-ordinal del número y los subsecuentes trabajos de esta obra pionera, han proliferado, a partir de la década de los «60» y hasta el momento actual, las investigaciones sobre los orígenes del número o, si se prefiere, sobre la construcción del número en el niño, tanto desde posiciones de afianzamiento en el seno de la propia Escuela de Ginebra, como de confirmación o de aceptación o refutación parcial, pero siempre en el seno de la propia teoría piagetiana, aunque se intenten integrar en la misma elementos de otros modelos o teorías (postpiagetianos o neopiagetianos). De hecho, desde 1960 hasta el momento actual, tenemos registrados más de 200 artículos de investigación sobre la conservación o la construcción del número, gran parte de ellos publicados en revistas de amplio impacto como *Child Development*, *Developmental Psychology*, *Journal of Experimental Child Psychology*, *Journal of Educational Psychology*, *Journal for Research in Mathematics Education*, *Arithmetic Teacher*, *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *Infancia y Aprendizaje*, *Estudios de Psicología*, etc., amén de otras tantas revisiones, libros y capítulos de libro, lo que supone cerca de una decena de millar de páginas dedicadas al tema que nos ocupa.

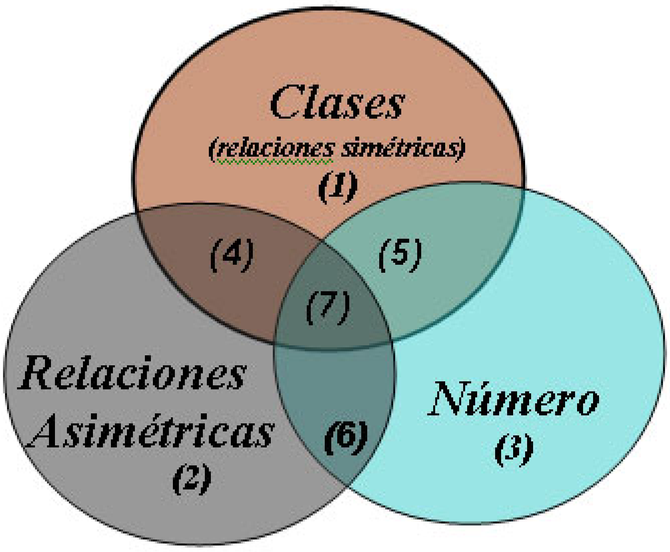
Las investigaciones que hemos venido desarrollando, desde 1980, sobre los componentes cardinales y ordinales del número, ponen de manifiesto que el número no es clase de relaciones simétricas transitivas (empleando la terminología de Russell, clase de clases) o, al menos, no sólo es clase de clases, como proponen los cardinalistas, tampoco hace referencia al encaje de relaciones asimétricas transitivas o, al menos, no sólo es relación de orden, como proponen los ordinalistas, aunque tampoco podemos admitir la indisociabilidad cardinal-ordinal del número, tal y como propone Piaget. Nosotros proponemos la siguiente explicación funcional que puede ser tomada a modo de definición:

«El número es una de las doce categorías kantianas reformuladas por Piaget que pertenece a la función implicativa de la inteligencia y que, por lo tanto, tiene como función la discretización del continuo (asimilación del universo). Como todas las categorías que permiten la adaptación del sujeto a su entorno, se encuentra regulada por la función organizadora de la inteligencia, lo que equivale a decir que es una ***totalidad*** independiente del resto de las categorías, con un ***sistema de relaciones*** que le es propio, unos ***fines*** específicos y unos ***medios*** (valores) adecuados al logro de esos fines».

Ahora bien, la función implicativa o asimiladora de la inteligencia es única y, por tanto, independencia, no significa aislamiento, sino interacción. Nos encontramos por tanto con una estructura cognitiva específica, con un funcionamiento igualmente específico y que ejerce una función interactiva con otras estructuras cognitivas de las que depende el propio proceso de asimilación.



Esta interacción determina que las estructuras o categorías estructurales que configuran el proceso centrípeto de la adaptación tengan un desarrollo más o menos armónico y, por tanto, que desde una perspectiva estadística «correlacionen» o «covaríen» entre sí. Sin embargo, esta correlación trasciende los límites estadísticos, porque estadísticamente no puede existir independencia (ortogonalidad) y covariación. La interpretación vendría dada en términos de “independencia de organización”: un sistema de relaciones característico, constituido por leyes específicas, unas finalidades diferenciadas y unos medios (esquemas) diversificados. Quizás por eso habría que ver esta situación más en la línea, o desde el punto de vista, de la “matemática ingenua”, como intersección de conjuntos. De esta manera podríamos interpretar nuestro estudio desde la perspectiva de un diagrama configurado por tres conjuntos que representarían los tres elementos configuradores del proceso de cuantificación en el hombre: clases, relaciones (asimétricas) y número.



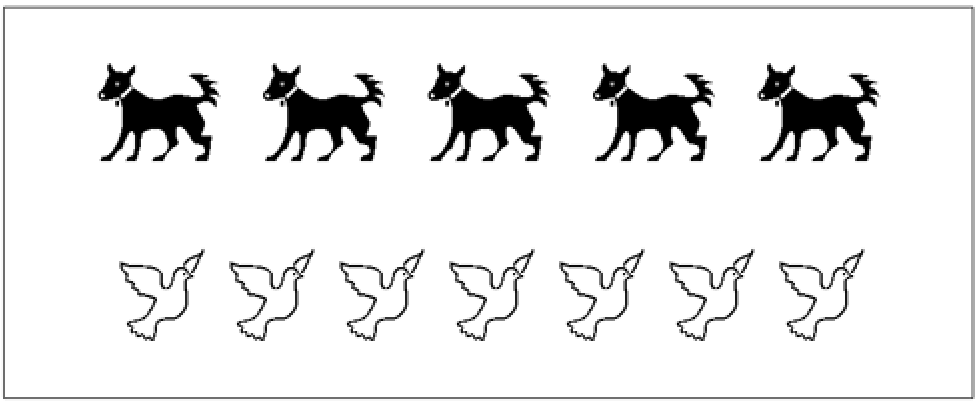
Utilizando una terminología y una interpretación puramente piagetiana, diremos que nos encontramos con las tres posibles formas de equilibración cognitiva (asimilaciónÛacomodación), al menos en lo que hace referencia a los procesos de cuantificación que nos ocupan en este trabajo:

Por un lado, tendríamos las equilibraciones internas de los subsistemas numérico (3+5+6+7), de relaciones simétricas (1+4+5+7) y de relaciones asimétricas (2+4+6+7), que se corresponderían a la primera de las formas de equilibración cognitiva descritas por Piaget y que tienden a la constitución (por asimilaciones sucesivas) y conservación (mediante acomodaciones conseguidas) de estos sistemas.

Por otro lado, tenemos las interrelaciones entre los tres subsistemas que se encuentran reguladas por un sistema de asimilaciones recíprocas, que conllevan sendas acomodaciones recíprocas (zonas 4, 5, 6 y 7) y que tienden a la constitución y conservación del sistema de cuantificación humano y a su mutua conservación, lo que corresponderían a la segunda de las formas de equilibración piagetiana.

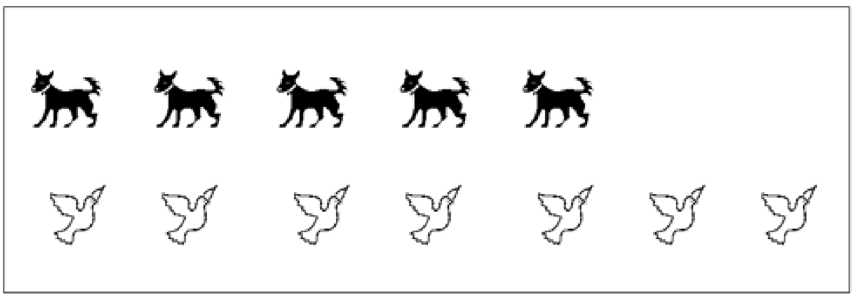
Finalmente, este sistema de cuantificación supone una organización de todos los subsistemas que engloba, gracias a un conjunto de transformaciones que implica un proceso doble. Por una parte, un proceso de integración (con carácter asimilador) de todos esos subsistemas en una estructura global y, por otra, un proceso de diferenciación (con carácter acomodador) de esa estructura global a las características del medio, proceso que se lleva a cabo a través de los propios subsistemas y que correspondería a la tercera de las formas de equilibrio cognitivo.

Aclaremos esto con un ejemplo. Imaginemos que, ante un conjunto de animales como el que se nos presenta en el cuadro siguiente, se nos hiciera esta pregunta de cuantificación: *«¿Qué hay más, animales o perros?»*.



En el momento en que procesamos la información que tenemos ante nosotros (cuadro y texto) sabemos que lo que tenemos que hacer es cuantificar, por comparación ("qué hay más"), un conjunto de animales (de los cuáles algunos son perros y otros son palomas), con una de sus partes (el subconjunto de los perros). Como la estructura que determina el sistema de cuantificación, coordina todos los subsistemas cuantificadores de la realidad (intensiva, extensiva simple y extensiva métrica), se establece que, de todos los posibles esquemas que pueden dar solución al problema y puesto que lo que se pide es la comparación del todo con una de sus partes, de acuerdo con la teoría de la economía del pensamiento[2], la acomodación más eficiente es realizada por la estructura de clasificación (zona 1 del diagrama) mediante la utilización de un ***esquema de inclusión*** (el conjunto de los perros está incluido en el de los animales) y, como determina el subsistema de cuantificaciones intensivas, puesto que el todo es mayor (si los subconjuntos de que consta el todo son no vacíos) o igual que la suma de las partes (si todos los subconjuntos del todo menos uno son vacíos), es evidente que la respuesta a la cuestión planteada al inicio es que *hay más animales que perros* (puesto que el subconjunto de las palomas de nuestro ejemplo es un subconjunto no vacío).

Imaginemos ahora que ante este conjunto que sigue la pregunta es: *«¿Qué hay más, perros o palomas?»*.



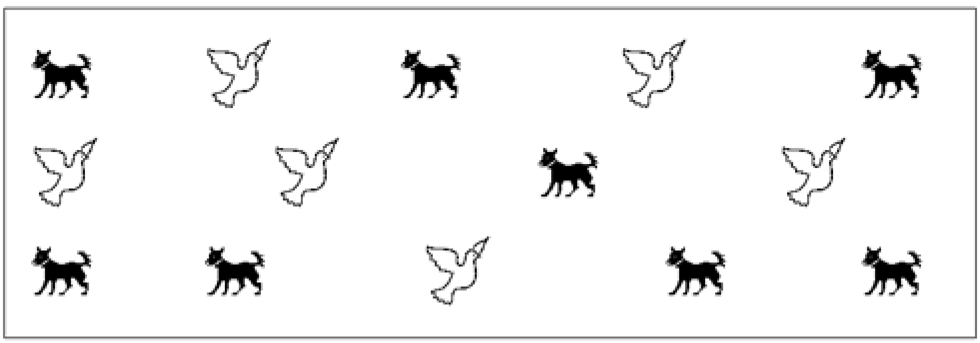
En esta nueva situación lo que se pide es la comparación de las partes entre sí, por lo que el proceso de cuantificación intensiva se torna inútil ya que, como hemos dicho, sólo puede funcionar en el caso de la comparación del todo con las partes; por tanto sólo cabe la utilización de un proceso de cuantificación extensiva y, dada la disposición espacial de los elementos a comparar, el proceso no parece requerir la utilización de un esquema cuantificador que requiera la iteración de unidades. Es evidente que la solución al problema planteado, para lograr la acomodación más eficiente, es el proceso de cuantificación extensiva simple.

La unidad funcional de conducta (esquema) que permite la solución más eficiente al problema planteado es, sin lugar a dudas y dada la disposición espacial de los elementos en nuestro ejemplo, el ***esquema de correspondencia uno-a-uno***: como hay algunos elementos del segundo conjunto (palomas) que no tienen imagen en el primer conjunto (perros) podemos concluir que *hay más palomas que perros*.

Ahora bien, el esquema de correspondencia unívoca o biunívoca es una unidad funcional de conducta que posibilita el recurso a la construcción de las clases[3] y, por esta razón, habría que ubicarla en el seno de ese conjunto (confrontar diagrama).

Sin embargo, el esquema de correspondencia uno-a-uno, es también un esquema numérico por cuanto, por ejemplo, contar, es, entre otras cosas, establecer una correspondencia biunívoca entre unas palabras (numerales) y unos objetos, por lo que podríamos decir que el esquema de correspondencia uno-a-uno supone la necesaria coordinación de los subsistemas de número y clase (zona 5 del diagrama).

Imaginemos, finalmente, que nuestros perros y nuestras palomas se distribuyen de la siguiente manera:



Si la pregunta vuelve a ser ahora, *«¿qué hay más, perros o palomas?»*, al tener que comparar las partes entre sí, debemos recurrir a un proceso de cuantificación extensiva, pero ahora parece más eficiente un proceso iterativo, es decir un proceso de cuantificación extensiva métrica. Quizás, de nuevo en aras de la eficiencia del proceso, el ***esquema de conteo*** sea el más adecuado para darle solución al problema.

Ahora bien, el esquema de conteo supone, tanto la utilización de un esquema de correspondencia biunívoca (objetos-numerales), como el establecimiento de un orden estable en los numerales (primero el 1, luego el 2, luego el 3, etc.), por lo tanto se requiere la coordinación de los tres subsistemas de número, clase y orden (zona 7 de nuestro diagrama de conjuntos).

Llegados a este punto, hemos de decir que aunque, aparentemente y por los ejemplos que acabamos de proponer, la coordinación de esquemas, necesaria para la constitución de un sistema cuantificador en el hombre, supone la integración de los mismos (afirmación), esta misma coordinación supone también la exclusión (negación) mutua de algunos esquemas. Esta negación se podría matizar bajo dos aspectos diferenciados: *negación por pertinencia funcional* o *negación por pertinencia material*.

La negación por pertinencia funcional se produce siempre entre los esquemas pertenecientes a un subsistema y las coordinaciones entre esquemas de este subsistema con otro(s) subsistema(s), es decir (cf. el diagrama en círculos anterior), la negación por pertinencia funcional, por ejemplo, de 1 es 4, 5 y 7 (4 T 5 T 7 = 1'). En efecto, si tomamos el primero de nuestros ejemplos, para dar respuesta a la cuestión: «¿qué hay más, animales o perros?» no resulta 'funcional' contar los animales y luego los perros para determinar que el cardinal de los primeros es mayor que el cardinal de los segundos, incluso aunque el razonamiento conduzca a, una vez contados los perros, suspender el funcionamiento del esquema de conteo por llegar a la conclusión de que, al seguir contando, el cardinal de los animales va a ser mayor y, por tanto, hay más animales que perros. Es evidente que el esquema de inclusión 'niega funcionalmente' al esquema de conteo.

La negación por pertinencia material se produce o entre esquemas pertenecientes a diferentes subsistemas (por ejemplo, en nuestro diagrama de círculos tendríamos que 1' = 2 T 3) o entre esquemas del mismo subsistema de naturaleza no reductible por conducir a acomodaciones diferentes. En efecto, tomemos dos esquemas de cuantificación pertenecientes al «subsistema número», que hemos designado como (3) en nuestro diagrama de círculos, como, por ejemplo, la aprehensión inmediata (*subitizing*) y la estimación. Si tratáramos de coordinar estos dos esquemas veríamos que no existe posibilidad material alguna de hacerlo.

En primer lugar, porque se orientan a acomodaciones diferentes, el primero conduce a la determinación del cardinal exacto de un conjunto de pocos elementos, concretamente un máximo de 7±2, que decía George A. Miller en su conferencia inaugural pronunciada ante la *Eastern Psychological Association*, y el segundo es una flexibilización de los esquemas cuantificadores numéricos que conduce a la determinación grosera del cardinal de un conjunto numeroso. En efecto, imaginemos un ejército numeroso en el que caminan delante tres soldados. Si se nos pide que cuantifiquemos el número de soldados que tiene el ejército a fin de preparar una carpa de alojamiento, no es posible aplicar el esquema de aprehensión inmediata por el tamaño del conjunto a evaluar y, como la valoración del cardinal del conjunto de los soldados no requiere una medida exacta aplicaríamos un esquema de estimación.

En segundo lugar, y por lo anteriormente apuntado, no es posible encontrar una ley de composición entre ambos esquemas [no olvidemos que la coordinación de esquemas es un nuevo esquema que enriquece a los preexistentes por la ley que los coordina: por ejemplo, la coordinación de esquemas aditivos y multiplicativos hace que el pensamiento sea distributivo: a.(b+c) = a.b+ a.c]. Muchos chistes, propios de la ingeniosidad latina, se encuentran basados en establecer una ley de composición sobre unidades funcionales de conducta no coordinables. Así, en el caso anterior, si consideráramos el conjunto del ejército subdividido en dos subconjuntos (los tres soldados que van delante y los restantes) y tratáramos de encontrar una ley de composición, como podría ser una ley aditiva de carácter unidimensional (+), llegaríamos al siguiente retruécano: ¿De cuántos soldados está compuesto el ejército?. De tres mil tres, porque delante vienen tres y detrás unos tres mil. Es, por tanto, evidente que el *esquema de estimación* 'niega materialmente' al *esquema de aprehensión súbita* o inmediata.

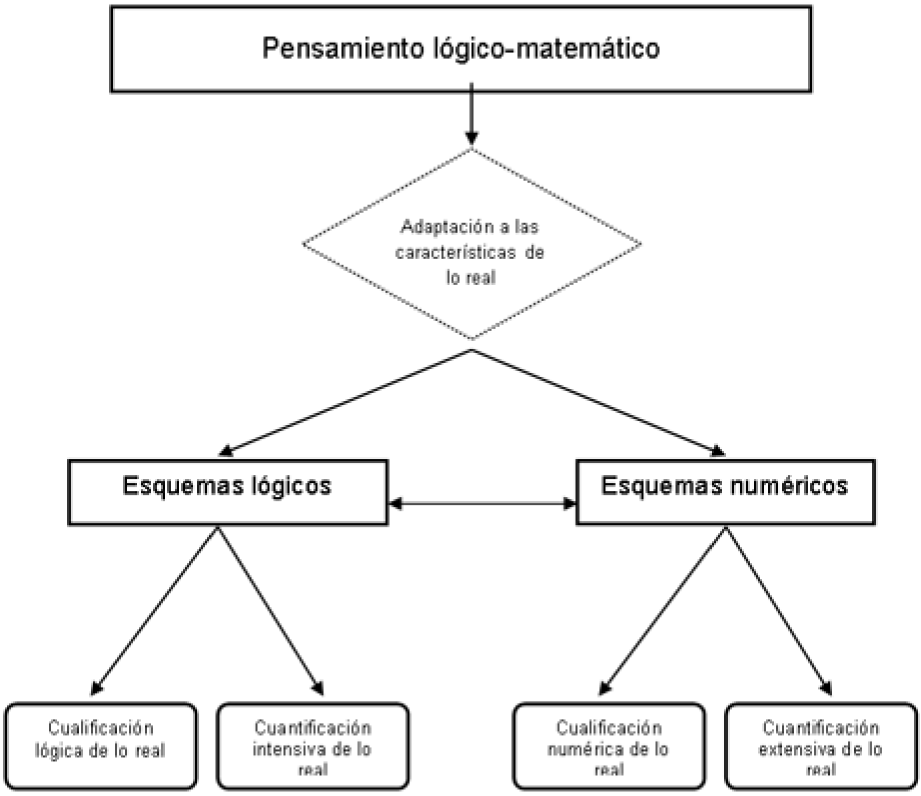
Finalmente, hemos encontrado en algunos trabajos y estudios previos que, en las primeras edades, el **número** (evidentemente, siempre hablamos del número natural, que es la primera y única extensión numérica alcanzable a estas edades) es más un instrumento de *cuantificación* de la realidad que de *cualificación* de la misma.

En un primer momento, y a falta de la constitución de un **sistema de relaciones** diferenciado, la organización del pensamiento lógico-matemático del sujeto se presenta como una **totalidad** «caótica» constituida por unos esquemas indiferenciados (**medios**) desde el punto de vista de los **fines** (lo que podríamos definir como etapa de *indiferenciación de esquemas*).

Paulatinamente se va produciendo una diferenciación de **medios** y **fines** que obliga a recurrir a la utilización de dos **sistemas de relaciones** diferentes e independientes que, por tanto, no pueden llegar a coordinarse en una estructura de conjunto (en una única **totalidad**), lo que supone que los conjuntos tengan unas cualidades diferenciadas, desde una perspectiva operatoria y funcional: cualidades numéricas y cualidades no numéricas (lo que podría ser asumido como una etapa de *diferenciación de esquemas sin integración*).

Por último, el niño irá dotando a su pensamiento lógico-matemático de la movilidad suficiente (**sistema de relaciones**) para organizar la información que extrae de su acción sobre la realidad en un sistema de conjunto (**totalidad**) con unos **medios** y unos **fines** determinados pero puestos siempre al servicio de la discretización del medio (etapa de *integración de los esquemas* en un sistema de conjunto) para interpretarlo de forma coherente, efectiva (*equilibración*) y cada vez más eficiente (*economía del pensamiento*).

Esto supone la posibilidad de elaborar un modelo funcional que, interpretado mediante un diagrama de flujo, sería el siguiente:

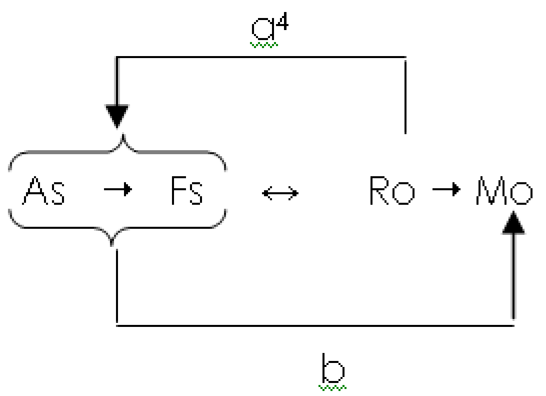


y vendría a confirmar, a grandes rasgos, las tres formas de equilibración cognitiva descritas por Piaget.

Sin embargo, y aunque las relaciones de equivalencia se mantienen para ambos tipos de cualidades, la numerosidad de un conjunto no es considerada como una ‘cualidad física' del mismo, como lo puede ser el tamaño, el color, la textura, etc. De esta manera, y aún admitiendo que un conjunto A es igual que un conjunto B e igual que un conjunto C porque todos tienen el mismo número de elementos, los pequeños niegan la posibilidad de que se puedan poner en el mismo grupo porque todos ellos «se parecen en la cantidad»; utilizando la terminología de Russell, no admiten la ‘clase de las clases' que tienen el mismo número de elementos, al menos, no al mismo nivel que admiten la clase de los perros como ‘clase de las clases' de perros de distintas razas, o la clase de los pequeños como ‘clase de las clases' de diferentes figuras geométricas pequeñas. Utilizando una terminología piagetiana, «el número presenta una alta resistencia a ser clasificado».

Tampoco se encuentra el número especialmente vinculado, en estas primeras edades, a la «idea de orden» y, por tanto, a una noción intuitiva de seriación. En nuestras experiencias hemos podido constatar que la «noción de tamaño», como en el caso de la clasificación, se refiere a cualidades físicas de los objetos o de los conjuntos de objetos, nunca al «tamaño numérico» de los conjuntos. El número, como relación de orden, parece tener un fuerte componente temporal, quizás vinculado al lenguaje, de manera que los niños llegan a comprender que el «cuatro» ‘precede' al «cinco» (***4 " 5***; ***4*** se dice ***antes*** que ***5***) y, más tardíamente, que «cuatro» ‘es menor' que «cinco» (***4 < 5***).

Por lo tanto, desde la perspectiva de un modelo de equilibración lógico-matemático a nivel de observables (**I** ***B***), podríamos concluir que las dificultades en la conservación de número vienen dadas por las resistencias de este ente para ser organizado desde la perspectiva de las relaciones simétricas (clases) y de las relaciones asimétricas (orden):



Por el contrario, los componentes incluidos en el proceso de cuantificación extensiva, simple o métrica, son elementos de gran relevancia a la hora de explicar la construcción del número en el niño, quizás, porque, como decía Marcel Boll en su *Histoire des Mathématiques*:

"A la suite d'une longue et pénible evolution… l'homme a fini par se rendre maître de deux techniques, qui font désormais partie de son «équipement mental»: l'appariement et le recensement[5]".

Sin embargo, aunque admitamos que el emparejamiento (correspondencia biunívoca) y el recuento (enumeración o conteo) son esquemas más o menos específicos de los procesos de cuantificación extensiva, no podemos olvidar que la correspondencia es solidaria de las clases y que el conteo, por ejemplo, es un esquema de correspondencia dotado de un orden[6]. ¿Cómo es posible, entonces, que afirmemos que los esquemas de clase y orden no tengan una excesiva relevancia para explicar el constructo número?.

Nuestra impresión es que las asimilaciones que el sujeto realiza o, expresado en otros términos, las discretizaciones que el sujeto efectúa del continuo son asimilaciones estáticas (en el sentido kantiano del término) y, si tenemos en cuenta que relación cuantitativa y número son categorías dinámicas de la función implicativa de la inteligencia, es fácil comprender que los pequeños realizan *asimilaciones deformantes* de la realidad, lo que les conduce a *acomodaciones* igualmente *deformantes*; es decir, existen disfunciones acomodadoras, porque existen disfunciones asimiladoras.

Sin embargo, a partir de lo que Pierre Gréco denominó *conservación de la cotidad*, el número es un instrumento cognitivo para la comparación de conjuntos a fin de determinar su posible equipotencia. Esto coincide, en el ámbito de las clases y de las relaciones asimétricas a una pérdida del componente espacial y objetal (lo estático de la acomodación) y a una ganancia de lo temporal y lo causal (lo dinámico de la acomodación).

Este sentido dinámico es fácil de captar, ya que el tiempo es el espacio en movimiento y la causalidad la dinámica del objeto. Expresando de forma más concreta esta afirmación podríamos decir que la creciente movilidad de los esquemas del sujeto hace que se alcance un suficiente nivel de descentración y se pueda pasar de lo estático del proceso de adaptación (estados) a lo dinámico de este proceso (transformaciones), con lo que la acción cobra una importancia capital para extraer información (pensamiento lógico-matemático) a la hora de conferir un significado a la realidad. ***Conocimiento físico*** y ***conocimiento lógico-matemático*** se constituyen así en un *eje bipolar* para interpretar el mundo.

Esta coordinación de lo *estático* y lo *dinámico* de la *función de adaptación* hace que la correlación existente entre los procesos de cuantificación *intensiva* y *extensiva* tenga connotaciones causales.

Implicaciones educativas.

Como decíamos con anterioridad, las investigaciones sobre la construcción del número y, muy especialmente, aquellos trabajos sobre la construcción del número en base a la integración de habilidades, han sido muy prolíficas y han dado lugar a la aparición de muchos modelos interpretativos, fundamentalmente a partir del último cuarto de siglo que acaba de concluir. En efecto, los trabajos de la Escuela de Ginebra durante el tercer cuarto del siglo precedente (1950-1975) y el impacto de

Piaget en los Estados Unidos de América en el último tercio de esa misma centuria, especialmente en las décadas de los «70» y de los «80», junto con la aparición de las teorías del procesamiento de la información, dio paso a un conjunto de propuestas integradoras entre ambas concepciones y modelos teóricos que, bajo el nombre de neopiagetianas, posibilitaron y abrieron el camino para numerosos y fructíferos trabajos acerca de la construcción del número a lo largo del último cuarto de siglo que acaba de concluir.

Sin embargo, estos descubrimientos altamente enriquecedores para la psicop8edagogía de las matemáticas no han llevado aparejados avances isomórficos en la práctica docente y el desfase investigación-praxis se hace cada vez más patente en nuestras aulas, de manera que hemos llegado a cotas de rendimiento escolar en esta disciplina que empiezan a ser muy preocupantes y que, en definitiva, lo que suponen es que la mayoría de los alumnos no alcanzan niveles adecuados de comprensión matemática. En este sentido Eduardo Martí concluye en un trabajo sobre psicopedagogía de las matemáticas financiado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica del Ministerio de Educación y Ciencia que, en nuestro país, el 86% de los alumnos de 13 años no alcanza el nivel de comprensión matemática correspondiente a su edad. Dentro del mismo orden de cosas, el informe Pisa de 2004 revela que un 20% de los alumnos de secundaria no son capaces de resolver con éxito un problema aritmético básico y las evaluaciones realizadas por el INCE muestran que el 50% de nuestros escolares no llegan a alcanzar en Matemáticas la nota media exigida. Además, las puntuaciones en matemáticas son las más bajas de todas las materias, tanto si nos referimos a Educación Primaria, como a la Educación Secundaria Obligatoria.

En los estudios comparados, se comprueba que, aunque esta materia presenta una gran dificultad para los niños de todos los países, los escolares españoles se encuentran en la cola mundial y sólo superamos a Sudáfrica, Colombia, Irán, Portugal, Grecia, Lituania y Chipre y, aunque esto es anecdótico, en las últimas Olimpiadas Internacionales de Matemáticas, sólo superamos en puntuación a portugueses e irlandeses.

A pesar de las críticas que este tipo de estudios internacionales de carácter transcultural suelen tener y de las múltiples interpretaciones a las que están sujetos, no se puede refutar el hecho de que los escolares españoles se encuentran por debajo de la media de los países de la OCDE y que, como postulan expertos en este campo "sus puntuaciones en matemáticas son escandalosamente bajas". Ante esta situación, las preguntas sobre ¿cuándo?, ¿cómo? y ¿por qué? se inicia este fracaso, son inevitables.

Seymour Papert se preguntaba si a los alumnos a los que se les enseñó álgebra durante un primer curso aprendían mejor la geometría del curso siguiente que aquéllos que durante ese primer curso se limitaron a hacer gimnasia. Ante la respuesta negativa a la pregunta se planteaba una nueva cuestión: “¿cabe identificar y enseñar algo distinto del álgebra o de la geometría y que, una vez aprendido, facilite el aprendizaje del álgebra o de la geometría?”. Nosotros efectuaríamos una traslación y de la pregunta y la haríamos de otra forma: ¿Hay que ‘enseñar matemáticas' a los niños o hay que hacer que ‘piensen matemáticamente'? y si la respuesta la encontramos en el segundo término de la disyunción, entonces cabría una segunda cuestión: ¿qué supone hacer que los niños ‘piensen matemáticamente'?.

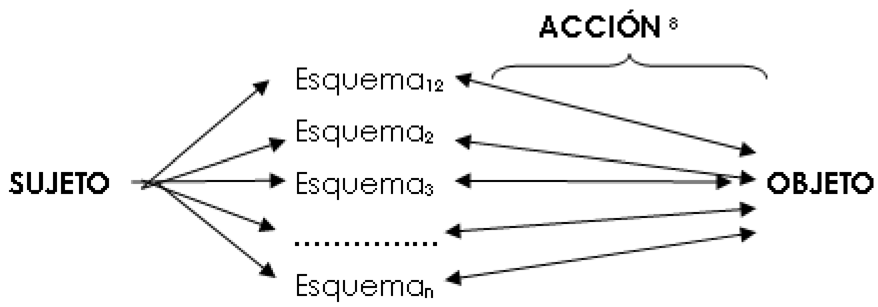
El conocimiento lógico-matemático

El conocimiento lógico-matemático (o si se prefiere, con las salvedades introducidas al principio, el conocimiento matemático) tiene sus peculiaridades que deben ser conocidas para poder entender los mecanismos de su adquisición y, de esta manera, elaborar las estrategias más oportunas para su enseñanza. Pero también tiene características que comparte con otros tipos de conocimiento (físico, social, etc.) que deben incorporarse al proceso de enseñanza y aprendizaje en estas etapas iniciales de la escolarización.

Pero ¿qué es este tipo de conocimiento que hemos venido denominando como *conocimiento lógico-matemático*?.

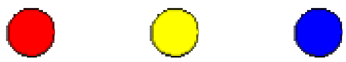
Sabemos que lo real se presenta ante el sujeto como un continuo que tiene que interpretar, lo que equivale a decir que le tiene que conferir un significado, por ello interactúa con el medio intentando *descomponer* y *recomponer* ese continuo a fin de «conocerlo».

Las unidades (funcionales) de conducta mediante las cuáles el sujeto interactúa con su entorno reciben el nombre de «esquemas». Un «esquema» es una «forma» que se aplica a un «contenido» (sin lugar a dudas, que el contenido puede ser otro esquema e incluso el mismo esquema)[7]. Los esquemas actúan en tres niveles que se corresponden con los tres niveles de equilibración cognitiva descritos. Por un lado, los esquemas se aplican sobre la realidad o sobre representaciones de la realidad y, en su caso, sobre los propios esquemas:



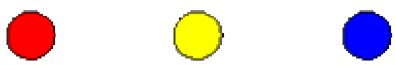
Es evidente que en este proceso de interacción el sujeto sólo puede extraer información de dos elementos: la acción y el objeto. Pues bien, la información que el sujeto extrae del objeto recibe el nombre de ***conocimiento físico*** y la información que extrae de su acción sobre el objeto recibe el nombre de ***conocimiento lógico-matemático***.

Imaginemos un conjunto de canicas de colores que se encuentran dispuestas de la siguiente manera:



podemos decir que este conjunto está formado por una canica roja, una canica amarilla y una canica azul. Pero ¿quién es roja? o ¿quién es amarilla? o ¿quién es azul?. Evidentemente las canicas. Esta es una información que está en el objeto y que yo extraigo del mismo: el conocimiento de los colores es un ejemplo de conocimiento físico.

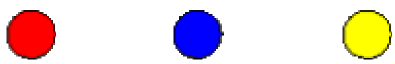
Situémonos, de nuevo, en el mismo conjunto anterior y tratemos de determinar el número de canicas que tiene el conjunto. Contamos las canicas comenzando, por ejemplo, por la roja y terminando por la azul:



1 2 3

diremos que el cardinal del conjunto es tres, es decir, hay tres canicas.

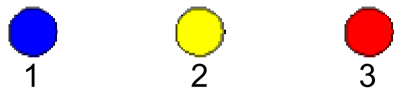
Pero imaginemos que empezamos por la roja y terminamos por la amarilla:



1 2 3

diremos, entonces, que el cardinal del conjunto es tres, es decir, hay tres canicas.

Sigamos imaginando. Supongamos que empiezo a contar por la azul y termino por la roja:



diremos, ahora, que el cardinal del conjunto también es tres, es decir, hay tres canicas.

Imaginemos las seis variaciones posibles (3!) a la hora de contar el conjunto formado por una canica roja, una canica azul y una canica amarilla. Llegaremos a la conclusión de que sea cual fuere el orden en el que se cuenten los elementos del conjunto siempre obtenemos por resultado ‘tres', por tanto, «el cardinal de un conjunto parece ser independiente del orden en que se cuenten sus elementos».

Esto, indudablemente, es “conocimiento” pero este conocimiento no lo he extraído de la realidad sino de mi acción sobre la realidad, de mi «acción de *contar* la realidad»[9]. La irrelevancia del orden en el conteo es un conocimiento lógico-matemático.

Las actividades encaminadas a lograr este primer nivel de equilibrio (entre el sujeto –esquemas- y el objeto –propiedades-) comenzarán siempre partiendo de un modelo **I *B*** (como el descrito en el capítulo anterior) y tratando de disminuir la resistencia del objeto a la aplicación del esquema. Una técnica posible (entre otras muchas) es poner al sujeto en situación forzada mediante un problema de carácter, generalmente, dicotómico. Por ejemplo, imaginemos que le damos a un niño, que se encuentra en la etapa de intuiciones simples (4 años, aproximadamente), un conjunto de elementos formado por figuras geométricas (cuadrados, triángulos y círculos) de dos tamaños (grandes y pequeños) y tres colores distintos (rojos, azules y verdes). Si, una vez reconocidas las características de los elementos que va a manipular, le pedimos que ponga en marcha un esquema de clase (relaciones de semejanza/equivalencia) a través de una consigna comprensible para el sujeto (supongamos que entiende perfectamente lo que quiere decir “pon juntos los que se parecen”), el pequeño podría hacer tres montones: cuadrados, triángulos y círculos (criterio forma).

Si, a continuación, le decimos: “Está muy bien, pero ahora intenta hacerlo de otra forma, es decir, no vale poner juntos los cuadrados, los círculos y los triángulos”. Teniendo en cuenta que el ‘criterio color' es un criterio que, genéticamente hablando, presenta una dificultad similar al ‘criterio forma', será muy probable que la ejecución del sujeto consista en destruir los tres montones anteriores y volver a realizar otros tres montones, pero esta vez teniendo en cuenta el color: rojos, azules y verdes. Por estar a nivel de intuiciones simples, aunque los criterios forma y color los maneja con una aceptabilidad que raya en lo operacional, no puede manejar simultáneamente ambos criterios (carácter aditivo o unidimensional del pensamiento que, en términos piagetianos, equivaldría a decir *«centración»*) y, por eso, a la hora de discretizar el continuo que se le presenta, es imposible que considere a la vez, la forma y el color (por eso se ve obligado a destruir la realizado y comenzar de nuevo la ejecución, a partir de otro criterio).

El residuo del **razonamiento transductivo** de los sujetos (propio de la *etapa preconceptual*) hace que, en este primer nivel de la *etapa intuitiva*, sus ejecuciones estén dominadas por la 'sucesividad inter-colecciones', como durante la etapa anterior determinó la 'sucesividad intra-colecciones', es decir, ahora hay simultaneidad intra-colección (inductividad) y sucesividad inter-colección (transductividad)[10].

Si, por último, le pedimos que utilice el tercero de los criterios (tamaño), diciéndole: "Está muy bien, pero ahora intenta hacerlo de otra forma, es decir, no vale poner juntos los cuadrados, los círculos y los triángulos, como hiciste antes, ni los rojos, los azules y los verdes, como has hecho ahora". Es posible que el sujeto rebuscara entre las distintas figuras geométricas (como si tratara de encontrar un nuevo criterio) y finalmente nos dijera: "no se puede".

Ante esta situación podríamos decir que nuestro sujeto es capaz de organizar lo real desde la perspectiva de «las semejanzas» utilizando los criterios 'forma' y 'color', pero no con relación al 'tamaño' y, además, los criterios que es capaz de utilizar no se coordinan entre sí.

Dadas las características del pensamiento del pequeño nos podríamos plantear dos objetivos:

a) disminuir la resistencia que el criterio tamaño (R_o) presenta para poner en marcha esquemas de semejanza (A_s) con este criterio (F_s), a fin de que pueda establecer colecciones en base al tamaño (M_o); y/o

b) conducir el pensamiento del sujeto hacia un modelo **II *B*** por coordinación de los observables en el objeto (forma y color) y en sus acciones de clasificación de lo real (en base a esos criterios).

En el primero de los casos (encontrar y/o hacer operativo un nuevo criterio), como reconoce el criterio 'tamaño', pero la 'fuerza' de los criterios 'forma' y 'color' anula su operatividad, deberíamos de partir de situaciones en que los criterios 'fuertes' no se encontraran operativos. Por ejemplo, si dejamos constantes los criterios 'forma' y 'color', utilizando un material compuesto sólo por cuadrados rojos grandes y pequeños y le damos al sujeto la consigna "pon juntos los que se parezcan, haciendo dos montones", lo más probable es que realice esos dos montones, colocando en uno los "grandes" y en otro los "pequeños"; aunque, si le preguntamos ¿por qué se parecen los elementos de cada montón?, la respuesta vendría dada en términos de 'forma', "porque son cuadrados", y si, a continuación, le decimos "pero si todos son cuadrados ¿por qué no los pones todos juntos?, es casi seguro que nos diría "porque tú me has dicho que haga dos montones".

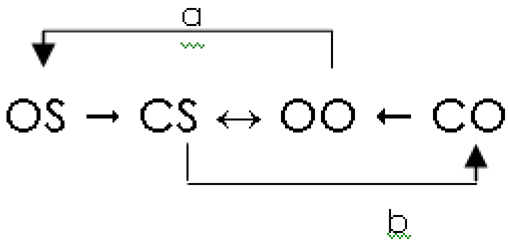
Si partiendo de los dos montones que ha construido, vamos dándole, de una en una, el resto de las figuras geométricas en un índice de dificultad creciente (desde la perspectiva de las relaciones de semejanza); por ejemplo, en primer lugar un cuadrado grande azul (difiere en el color del último elemento del montón de los cuadrados grandes), luego un cuadrado verde pequeño (id. con relación a los pequeños), seguimos con un círculo pequeño verde (se asemeja en el color al último elemento pequeño colocado), un triángulo grande azul (id. con relación a los grandes), etc., diciéndole siempre: "y éste, ¿en qué montón lo pondrías?" (si, en algún momento, dijera que no se puede poner en ningún montón porque no se parece a ninguno, se le diría: "bueno, es igual, pero tú ponlo en uno, en el que mejor creas que esté").

Al final de la tarea, el niño tendría dos montones, los 'grandes' y los 'pequeños' y, si le preguntamos en qué se parecen los elementos de cada montón, es muy probable que nos diera la solución del tamaño.

De la misma manera que hemos introducido la cualidad de tamaño, tal y como hemos dejado reflejado en las ***Conclusiones*** de este trabajo, deberíamos introducir la *cualidad número*, a través de actividades similares. Igualmente, al mismo tiempo que trabajamos las relaciones «más que» / «menos que» o «mayor que» / «menor que» con distintos criterios y cualidades físicas, también deberíamos hacerlo con los criterios de número y las cualidades numéricas establecidas en los conjuntos. Esta «ordenación» también se debería introducir a otras cualidades de lo real (sonidos –más grave, menos grave-; colores –más rojo, menos rojo-; etc.) porque todo es 'seriable'.

De hecho, en situaciones coloquiales, es fácil encontrar momentos en los que se establece o se pide que se 'serien' cualidades de muy difícil ordenación porque pertenecen a subconjuntos no compatibles, como afectos ("a quién quieres más, a papá o a mamá", "yo quiero más a A que a B"), relaciones sociales ("A es más amigo mío que B"), conductas socio-políticas ("A es más demócrata que B").

En el segundo de los casos, (lograr la coordinación de observables en el objeto y en la acción), partiríamos, como hemos dicho de un modelo tipo **II *B***[11]:



La técnica a utilizar sería similar al primero de los casos. Teniendo en cuenta que el criterio forma parece predominante sobre el criterio color[12], partiríamos de la situación en la que el criterio abarcador tiene menos cohesión interna[13] y que era aquella en la que existían tres montones cuyos elementos estaban agrupados según el 'color' (rojo, azul y verde) y le diríamos: "Estos (señalando los rojos), ¿por qué se parecen?. Como ya nos respondió con anterioridad, nos dirá: "Por que son rojos". Entonces se le dice: "Vamos a jugar sólo con este montón (los rojos) y ahora vas a poner juntos los que se parecen". Teniendo en cuenta que el criterio forma es muy dominante, no tendrá mucha dificultad en subdividir la colección de los 'rojos' en tres subcolecciones (cuadrados, triángulos y círculos). Lo mismo se le pedirá con los otros dos montones (los 'azules' y los 'verdes'), de manera que tendremos tres clases (rojos, azules y verdes), con tres subcolecciones cada una (cuadrados, triángulos y círculos), lo que supone un inicio en la coordinación de los dos criterios y un enriquecimiento de los esquemas de clasificación que va a marcar la posibilidad de tránsito de la subetapa de ***intuiciones simples*** a la de ***intuiciones articuladas***.

Esta posibilidad de articulación de dos criterios, es decir, del trabajo sistemático con dos dimensiones del objeto, hace que el pensamiento, hasta ahora ***aditivo*** (acciones interiorizadas sobre una única dimensión del objeto), devenga en ***multiplicativo*** (acciones interiorizadas sobre dos dimensiones del objeto, consideradas de manera simultánea).

Es fácil de comprender que, a partir de esta situación, podríamos llegar a establecer la posibilidad de división de los conjuntos establecidos bajo el criterio 'forma', en subconjuntos determinados por el criterio color, con lo que diríamos que el pensamiento es ***conmutativo***.

Notemos que, cuando hemos llegado a esta situación, el sujeto puede comenzar a trabajar con lo que Jean Piaget, Alina Szeminska y Bärbel Inhelder denominaron clasificaciones multiplicativas[14] y correspondencia múltiple, conducente a la multiplicación numérica[15], de manera que puede llegar a resolver una situación como la siguiente:

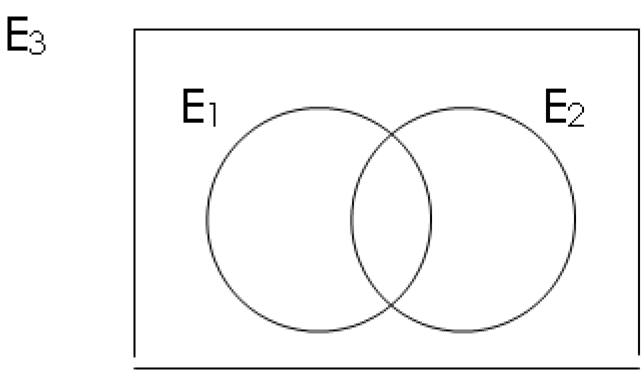
Sea un conjunto de triángulos, cuadrados y círculos sin pintar (color madera) y dos botes de pintura de dedos (roja y azul). Si se pintan las figuras con los dos colores ¿cuántas clases distintas se pueden formar?.

	△	□	○	
Azul	▲	■	●	3
Rojo	▲	■	●	3
	2	2	2	6

Si multiplicamos (consideramos simultáneamente) tres(3) clases de figuras geométricas por(x) dos(2) colores, tenemos(=) seis(6) clases distintas; de las cuales tres(3) son azules y(+) tres(3) rojas, o también(≈), dos(2) están formadas por triángulos y(+) dos(2) por cuadrados y(+) dos(2) por círculos.

$$3 \times 2 = 6 = 3 + 3 = 2 + 2 + 2$$

El segundo nivel de equilibrio se basa en las asimilaciones y acomodaciones recíprocas entre dos esquemas. En efecto, cuando dos esquemas (E_1 y E_2) se aplican al mismo conjunto de objetos (O) o a conjuntos de objetos de parecidas características (O_1, O_2, …) es fácil -e incluso necesario- que el sujeto se plantee por qué dos conductas distintas pueden aplicarse a elementos similares, con lo que llegan a encontrar en esas conductas una parte operativa común y entonces decimos que entre E_1 y E_2 se ha producido una asimilación recíproca. Pero, al mismo tiempo, encuentran (por el necesario equilibrio entre afirmaciones y negaciones) una parte operativa no común y específica de cada esquema con lo que decimos que se ha producido una acomodación recíproca entre E_1 y E_2.



Cuando este segundo nivel de equilibrio se alcanza decimos que hay una coordinación de esquemas.

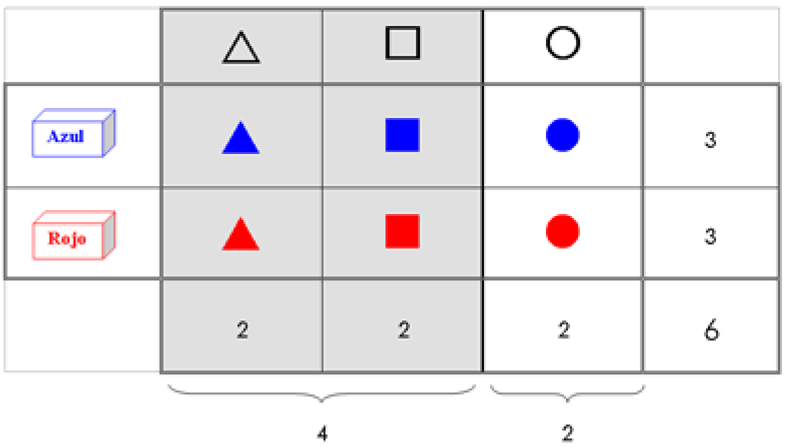
Una coordinación de esquemas es un nuevo esquema y por tanto, una nueva ley de composición “diferente” a las anteriores, es decir a aquellas que determinaban los esquemas de partida que se coordinan:

$(E_1 \ \mathit{coord.}\ E_2 = E_3)$

Continuando con nuestro ejemplo anterior, podemos decir que una vez constituidos los esquemas aditivos y multiplicativos y adquirida la movilidad suficiente, o si se prefiere, perdida la rigidez inicial de los segundos[16], deben coordinarse, con el fin de ir constituyendo y enriqueciendo el sistema (la estructura) de cuantificación del sujeto. ¿Qué supone la coordinación de esquemas aditivos y multiplicativos?. Evidentemente, y por lo dicho con anterioridad un nuevo esquema y, por tanto una nueva ley cognitiva. ¿Cuál es ese esquema?, ¿cuál es la ley de composición que lo caracteriza?, ¿qué supone para el pensamiento? y, finalmente, ¿cómo podemos lograr que se produzca la coordinación necesaria para su constitución?.

Imaginemos que, sobre su ejecución anterior, le preguntamos a nuestro pequeño: ¿Cuántas de las figuras geométricas tienen puntas (vértices) y cuántas no?. Al pintarlos de colores, ¿cuántos montones tienen puntas y cuántos no?. Separa los que tienen puntas de los que no las tienen.

Retomemos pues nuestra disposición multiplicativa anterior con una pequeña modificación:



Es evidente que hay dos(2) clases de figuras con puntas y(+) una(1) sin puntas y si se pintan(x) con los dos(2) colores que teníamos, habrán(=) cuatro(4) clases de figuras con puntas y(+) dos(2) sin puntas.

$$(2 + 1) \times 2 \ = \ 2 \times 2 \ + \ 1 \times 2 \ = \ 4 + 2 \ = \ 6$$

La coordinación de esquemas aditivos y multiplicativos hace que el pensamiento se dote de una nueva ley (*ley distributiva*) por lo que decimos que, ahora, el pensamiento es **distributivo**.

En este orden de cosas no debemos olvidar que el algoritmo vertical de la multiplicación que nosotros utilizamos se basa, precisamente, en el carácter distributivo del pensamiento:

23 x 15 = 23 x (10 + 5) = 230 + 115 = 345

$$\begin{array}{rrr} & 2 & 3 \\ \times & 1 & 5 \\ \hline 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & (0) \\ \hline 3 & 4 & 5 \end{array}$$

Finalmente, los esquemas constituidos se van *integrando* en un sistema de conjunto (sistema de cuantificación humano) y los esquemas se van "especializando" merced a un proceso de *diferenciación* por la función de la estructura general (sistema) sobre los elementos que lo componen. En este sentido, las actividades de aprendizaje deben ir encaminadas en la línea del conocimiento estratégico, fundamentalmente, al establecimiento de estrategias de selección, a fin de determinar qué características de lo real son relevantes (o más relevantes) para solucionar el problema; estrategias de elaboración, para determinar qué conocimientos previos están disponibles y son concordantes con el problema planteado; y estrategias de organización, a fin de conectar 'lo nuevo' con 'lo viejo' y producir la solución más adecuada al problema planteado. En este sentido, volvemos a en contra la necesidad del equilibrio entre la asimilación (que es cuestión de integración) y la acomodación (que es cuestión de diferenciación).

Llegados a este punto hemos de efectuar dos importantes aclaraciones. En primer lugar, el hecho de que un sujeto adquiera o construya un esquema aditivo, multiplicativo o partitivo, incluso que su pensamiento sea distributivo, no quiere decir que sepa sumar, multiplicar o dividir, en el sentido aritmético de estos términos. Lo que quiere decir es que posee instrumentos cognitivos para iniciar, de alguna forma, el aprendizaje de las operaciones aritméticas. En segundo lugar, el hecho de que hayamos planteado actividades de aprendizaje que han generado desarrollo (por ejemplo, pasar de las intuiciones simples a las intuiciones articuladas), no indica, en modo alguno, que nos situemos en una perspectiva vigotskiana frente a una posición piagetiana[17]. Nosotros consideramos que el binomio aprendizaje/desarrollo es un par dialéctico y no conferimos preponderancia a ninguno de los dos polos del par[18]. En efecto, si hemos postulado una actividad de aprendizaje que ha posibilitado el paso de las intuiciones simples a las intuiciones articuladas, también acabamos de decir que el aprendizaje de la suma y de la multiplicación requiere un cierto nivel de desarrollo de los esquemas aditivos y multiplicativos, respectivamente.

Los esquemas operatorios.

Hasta ahora sólo hemos hecho referencia explícita a la adquisición de los esquemas numéricos desde la perspectiva de la *función de adaptación*, es decir, como el equilibrio necesario entre la asimilación y la acomodación, pero para el proceso de enseñanza y aprendizaje es necesario estudiarlo también desde la perspectiva de la *función de organización* puesto que, para que el pensamiento pueda ponerse de acuerdo con lo real, primero ha de estar de acuerdo consigo mismo.

Para Piaget, el *sistema cognitivo humano* está constituido por dos subsistemas: El ***subsistema I*** (que es el sistema de «comprender» o «conceptual») y el ***subsistema II*** (que es el sistema de «saber hacer» o «procedimental»), es decir que, para Piaget, ***«conocer» es, indisociablemente, «comprender» y «saber hacer»***. En efecto, en 1979, Piaget e Inhelder introducen un nuevo par dialéctico en la teoría del eminente epistemólogo ginebrino[19] vinculado a la función reguladora de la inteligencia: estructuras *versus* procedimientos o **conocimiento declarativo** *versus* **conocimiento procedimental**. El *conocimiento declarativo* lo constituyen los hechos, los conceptos y los principios[20], es generado por un tipo de esquemas que Piaget denomina ***esquemas presentativos*** y nos permite comprender las razones (saber por qué). El *conocimiento procedimental* lo constituyen los procedimientos, es generado por ***esquemas procedimentales*** y nos permite saber hacer.

Las características generales comparadas de estos dos tipos de conocimiento son:

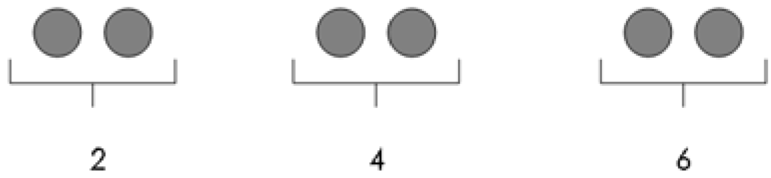
Conocimiento declarativo	Conocimiento procedimental
No está sujeto a variaciones espacio-temporales (intemporal). Está dirigido a comprender las razones (saber por qué). Necesita de comprensión cons-ciente, sobre todo a partir del nivel operacional. Se desarrolla mediante encajes sucesivos (el conocimiento supe-rado se integra en el que le su-pera). Consiste en lograr el enriqueci-miento cognitivo encontrando le-yes de composición entre conoci-mientos y estructuras anteriores.	Está sujeto a variaciones espacio-temporales. Está dirigido a alcanzar un objetivo (saber hacer). La comprensión consciente puede ser útil, pero no necesaria. Se desarrolla mediante una cadena secuencial, sustituyendo cada enlace al anterior, al menos parcialmente. Consiste en lograr el enriqueci-miento cognitivo a través de la variedad: alcanzar el objetivo por caminos diferentes.

Sin embargo, aunque sólo existen dos subsistemas cognitivos (comprender y saber hacer) y parece que ambos se encuentran dotados de los instrumentos adecuados (esquemas presentativos y esquemas procedimentales), es necesario recurrir a un tercer conjunto de esquemas porque existe un conocimiento que es indisociablemente declarativo y procedimental. Este tercer conjunto de esquemas es nominado por Piaget con el nombre genético de ***esquemas operatorios***.

En efecto retomemos nuestro ejemplo de las canicas y tratemos de determinar el cardinal del siguiente conjunto mediante la aplicación de un esquema de conteo:

Comenzaremos con el punto inicial de la serie numérica e iremos atribuyendo un numeral y sólo un numeral, de forma iterativa, a cada uno de los elementos del conjunto, de forma biunívoca, y diremos: “uno”, “dos”, “tres”, “cuatro”, “cinco” y “seis”. Hay seis canicas.

Supongamos que las canicas se disponen de la siguiente forma:



Es muy probable que, ante esta nueva situación apliquemos el mismo esquema, es decir, el esquema de conteo, pero que esta vez, en lugar de contar siguiendo la serie de los números naturales, lo hagamos siguiendo la serie de los números pares: “dos”, “cuatro” y “seis”. Hay seis canicas.

Se ha variado la ‘disposición espacial' de los elementos y hemos ‘modificado' el esquema de conteo, la ‘manera' de contar. Hemos utilizado el *mismo esquema* pero mediante un *procedimiento* diferente.

¿Qué podríamos decir del esquema de conteo?. Evidentemente, que se trata de un **esquema procedimental** porque al variar la disposición espacial de los elementos, y en aras de su eficiencia, el procedimiento de contar ha sido modificado, por tanto, está sujeto a variaciones espacio-temporales; está dirigido a alcanzar un objetivo (determinar el cardinal del conjunto); la comprensión consciente de su ejecución no es necesaria (lo importante es contar eficaz (correctamente) y eficientemente (con rapidez); se desarrolla mediante una cadena secuencial en la que los enlaces son sustituidos de manera parcial (secuencia (n) vs. secuencia (2n); y, finalmente, permite alcanzar el objetivo por caminos diferentes.

Sin embargo, cuando hemos contado la primera de las series, hemos dicho que hay *seis canicas*, porque hemos pronunciado el numeral «seis», pero también hemos pronunciado el numeral «cinco», y el «cuatro», y el «tres», etc.; entonces ¿por qué no hemos dicho que hay «cinco», o «cuatro», o «tres»… canicas?. Igual ha ocurrido cuando hemos contado la segunda de las series que hemos pronunciado los numerales «dos», «cuatro» y «seis» y, a pesar de ello, hemos afirmado que hay *seis canicas* y no cuatro ni dos. Esto se debe a que hemos aplicado el ***principio cardinal*** que viene a decir que “el cardinal de un conjunto viene determinado por el numeral aplicado al último elemento contado”. Esto es así, independientemente de la disposición espacial de los elementos del conjunto, por tanto, no está sujeto a variaciones espacio-temporales; es necesaria su comprensión consciente; permite responder a la pregunta ¿por qué hay seis canicas en ese conjunto?, luego está destinado a comprender las razones… Es por tanto un conocimiento declarativo (no en vano lo denominamos «principio» cardinal), lo que nos conduce, sin solución de continuidad, a decir que el esquema de conteo es un **esquema presentativo**.

Pero, ¿cómo puede un esquema ser, a la vez, presentativo y procedimental?, ¿cómo puede generar, simultáneamente, un conocimiento declarativo y procedimental?. La respuesta viene dada por el hecho de que el **esquema de conteo** es un **esquema operatorio**.

Uno de los problemas de la enseñanza en general, y de las matemáticas en particular, es que el maestro tiende a que el sujeto ‘sepa hacer', lo que equivale a decir que se fija objetivos procedimentales descuidando los objetivos declarativos, con lo que está castrando el sistema cognitivo del individuo. Podríamos decir, parafraseando la suprema ironía de d'Alembert, que su principio guía de la enseñanza es: ”seguid haciendo, el conocimiento vendrá después”[21]. Esta postura, si en todas las disciplinas es un error metodológico, en matemáticas es un problema de enorme dimensiones. En efecto, puesto que los esquemas lógico-matemáticos son operatorios, el trabajar desde una perspectiva procedimental impide el desarrollo de los mismos ya que no son procedimentales (aunque tengan un componente procedimental), lo que hace que, desde muy tempranas edades, los esquemas lógico-matemáticos se encuentren insuficientemente alimentados y como el conocimiento declarativo que genera la parte presentativa del esquema consiste, como hemos dicho, en lograr el enriquecimiento cognitivo encontrando leyes de composición entre conocimientos y estructuras anteriores, si estos conocimientos, esquemas o estructuras no están disponibles, es evidente que no es posible construir sobre ellos. Por lo tanto, el fracaso está servido.

El aprendizaje de la noción de número.

Para Kitcher, el conocimiento matemático no está constituido desde el comienzo, y *a priori*, en cada generación. En cada momento se aprende un cierto nivel matemático que puede ser, y de hecho lo es, permanentemente modificado. En ese desarrollo el conocimiento viene apoyado en una cierta práctica que, para este autor, posee varios componentes. En concreto dichos componentes son:

· un lenguaje

· un conjunto de proposiciones aceptadas por la comunidad matemática en un tiempo determinado…

· un conjunto de cuestiones importantes, de problemas no resueltos…

· un conjunto de formas de razonamiento

· un conjunto de visiones del hacer matemático, es decir, de cómo se hacen matemáticas

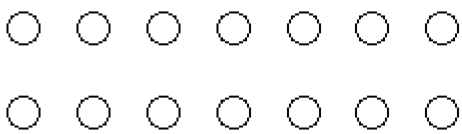
Podemos comprobar, sin caer de pleno en la historicidad[22], que estos componentes que Kitcher sitúa en la filogénesis, pueden ser trasladados, con todo derecho, a la ontogénesis.

En efecto, en cada momento se adquiere un cierto nivel matemático que está en continuo cambio. Por ejemplo, hemos podido comprobar, en la *macrogénesis*, un desarrollo que podría perfectamente responder a la siguiente secuencia:

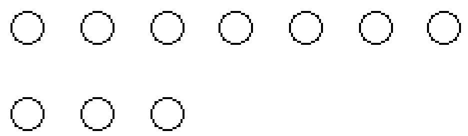
esquemas aditivos Ò pensamiento aditivo conmutativo Ò generalización de los esquemas aditivos Ò esquemas multiplicativos Ò pensamiento multiplicativo conmutativo Ò coordinación de esquemas aditivos y multiplicativos Ò pensamiento distributivo Ò… Ò.

Analizando el desarrollo de los esquemas de conteo, se puede comprobar igualmente, pero ahora en la *microgénesis*, una secuencia evolutiva: aplicación de palabras-número (no tienen por qué ser numerales), sin ningún tipo de orden, a los objetos (uno, tres, doce, nueve, “veinticatorce”, seis…) Ò aplicación de numerales, sin ningún tipo de orden, a los objetos (uno, tres, doce, nueve, siete…) Ò aplicación de numerales a los objetos en un orden (sabe que unas palabras se dicen antes que otras) no estable (uno, tres, seis, nueve, once…, aunque otras veces puede decir: uno, dos, cuatro, nueve…) Ò aplicación de numerales a los objetos con un orden estable que no responde a la cadena de los números naturales (uno, tres, siete, nueve,… y si vuelve a contar el mismo conjunto repite la misma serie: uno, tres, siete, nueve,…) Ò aplicación de numerales a los objetos con un orden estable que se corresponde con la cadena de los números naturales (uno, dos, tres, cuatro, cinco,…) pero que tiene carácter irrompible (siempre se empieza a contar por el número ‘uno') Ò … Ò.

Este conocimiento se apoya en cada momento, como acabamos de comprobar, en un lenguaje determinado, de manera que las ejecuciones correctas o incorrectas del sujeto hemos de analizarlas desde la «historicidad ontogenética». Por ejemplo, cuando le damos a un niño de cuatro años (aproximadamente) una cantidad discreta compuesta, por ejemplo, por un conjunto de siete fichas y le pedimos que construya un conjunto ***más*** numeroso que el que nosotros hemos construido es probable que su ejecución sea la siguiente:



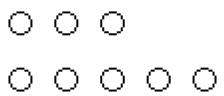
Sin embargo, si le pedimos que construya un conjunto ***menos*** numeroso que el nuestro, podría realizar algo similar a esto:



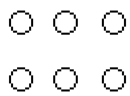
Esto nos aventuraría a decir, erróneamente, que el sujeto sabe construir un conjunto menos numeroso que otro dado, pero no construir un conjunto más numeroso que otro.

Sin embargo, si el sujeto aprende (también) por imitación, sería muy difícil sostener esa afirmación porque, en el lenguaje coloquial, la expresión «más que» es comúnmente utilizada, mientras la expresión «menos que» está prácticamente en desuso (nosotros decimos: más alto-más bajo; más grueso-más delgado; más largo-más corto…; y casi nunca recurrimos a expresiones como menos alto, menos grueso, menos largo…). Desde esta perspectiva parece más sensato que el pequeño “aprenda antes” el significado del *más* que el significado del *menos* (siquiera por las dificultades en la construcción de las negaciones).

Supongamos ahora que le damos un conjunto formado por tres elementos y le pedimos que construya un conjunto más numeroso que el que nosotros hemos hecho. El niño podría hacer algo muy parecido a lo siguiente:



Pero si ahora le decimos que, frente a nuestro conjunto de tres elementos, ponga uno menos numeroso que el nuestro su ejecución sería:



Siguiendo con nuestras conclusiones disparatadas diríamos que ahora es capaz de construir un conjunto más numeroso que otro dado, pero no un conjunto menos numeroso.

Ninguna de las dos conclusiones son correctas. El sujeto es “uno” y no puede ser, a la vez, hábil e inhábil. La realidad es la siguiente:

Los términos «más» y «menos» tienen un carácter objetivo (juzgue quien juzgue comparativamente dos conjuntos homogéneos, el conjunto más numeroso es mayor y… punto). Sin embargo, la dificultad de descentración de los pequeños en estas edades hace que se subjetivicen los términos del lenguaje, por eso el sujeto asocia los vectores lingüísticos objetivos «más» y «menos» a los escalares subjetivos «muchos» y «pocos» (lo que para alguien es mucho, para otra persona puede ser poco, lo que en un momento determinado puede ser mucho, en otro momento puede ser poco…), de manera que cuando yo le doy siete elementos y le digo que ponga más él interpreta que yo he puesto muchas y que el tiene que poner (más) muchas como yo. Cuando le digo que ponga menos él interpreta que yo he puesto muchas y que le estoy pidiendo que ponga (menos) 'poquitas'.

Una vez que sabemos lo que son 'poquitas' para el pequeño (3), le damos un conjunto de tres elementos (de pocas fichas, utilizando su estimación) y le digo que ponga más que yo. Entonces piensa que yo he puesto pocas y le pido que ponga (más) muchas, por lo que coloca cinco fichas que, en ese momento y para la realidad "fichas", suponen para él muchas. Por el contrario, cuando yo le doy esas tres fichas (que son pocas para el niño) y le pido que ponga menos interpreta lo siguiente: "Ha puesto pocas y me dice que ponga (menos) poquitas como él", por lo tanto, pone también tres fichas.

Igualmente, el conocimiento del sujeto se apoya en un conjunto de proposiciones aceptadas por el pensamiento en un momento determinado de la ontogénesis. En efecto, cuando ante la prueba de conservación de las cantidades discretas que nosotros hemos utilizado, le pedíamos a los sujetos que frente a una colección de siete fichas pusieran las mismas que nosotros y realizaban la siguiente ejecución:

○   ○   ○   ○   ○   ○   ○

○○○ ○ ○ ○ ○ ○ ○○

no es que realizara una ejecución incorrecta, es que la proposición aceptada como verdad para su pensamiento es que «dos colecciones que tienen la misma longitud son iguales».

Siguiendo la propuesta de Kitcher, el conocimiento matemático se genera a partir de un conjunto de cuestiones importantes y de problemas no resueltos; pero, ¡ojo!, de cuestiones importantes para el sujeto (motivación) y de problemas no resueltos por el sujeto pero que se encuentren, como diría Vigotsky, en su zona de desarrollo próximo, es decir, que se puedan resolver mediante procesos de equilibración mayorante. Este componente determina los objetivos y contenidos educativos en el proceso de enseñanza y aprendizaje y justifica cualquier opción metodológica en el seno del paradigma constructivista que garantiza, no sólo la construcción de significados (cognición), sino, además, la atribución de sentido (motivación).

El conocimiento lógico-matemático necesita apoyarse también en un conjunto de formas de razonamiento de las que va a depender el tipo de este conocimiento y las formas de su adquisición. En este sentido, a lo largo del desarrollo, encontramos tres formas de razonamiento a la hora de elaborar una construcciones mental, determinar los contenidos intencionales de las acciones y conferir un significado de lo real: razonamiento **transductivo** (que va de lo particular a lo particular), razonamiento **inductivo** (que va de lo particular a lo general) y razonamiento **deductivo** (que va de lo general a lo particular).

Finalmente Kitcher postula que el conocimiento matemático depende de un conjunto de visiones del hacer matemático, es decir, de cómo se hacen matemáticas. Las cuatro grandes líneas básicas en el saber y en el hacer matemático son las siguientes:

· *Constructivista:* que emana de Brouwer y, fundamentalmente, de Kant y que supone aceptar que son las entidades reales las que, al permanecer o transformarse, provocan el pensamiento matemático y, al hacerlo, obligan a la construcción de formas y estructuras que tratan de captar, de alguna manera, los procesos reales y provocan la construcción de modelos posibles de esa realidad.

· *Empirista:* que tendría a Mill como máximo exponente y que se plantea la cuestión de cómo se alcanza el conocimiento y cómo se enlaza la matemática con lo real (enlace que se estima como algo más que un mero accidente).

· *Logicista:* que teniendo a Frege como autor más representativo y que se apoya en el proceso demostrativo a partir de unos contenidos de pensamiento puro y se plantea la necesidad de unas conceptografías básicas, diferentes del lenguaje natural, para la expresión del “hacer matemático”.

· *Formalista:* apoyada en el poder del signo y de lo ideográfico, y que se plasma en los procesos algebraicos, en el «Análisis» de Euler y Lagrange, en los principios de permanencia de leyes formales, en el inscripcionismo sígnico de Heine o Thomae y que culmina con el formalismo finitista de Hilbert.

Las nociones matemáticas deben ser, por tanto y por este orden, constructivas (provocando el pensamiento matemático), empíricas (enlazando siempre el contenido matemático con la realidad circundante al sujeto), lógicas (diferenciando lo real de la acción, el mundo físico del pensamiento, el lenguaje natural del guaje matemático) y formales (sostenidas por sistemas de representación específicos y por la permanencia e invarianza de las leyes cognitivas que son, en último lugar, de naturaleza lógico-matemática).

Teniendo en cuenta todas estas cuestiones y el hecho de que nuestro trabajo haya puesto de manifiesto el componente cualitativo del número en todo su desarrollo anterior a la conservación de la «cotidad» y, por tanto, la necesidad de utilizar actividades numéricas cualitativas, previas a cualquier estado de cuantificación, en el proceso de enseñanza y aprendizaje del número en Educación Infantil y de manera equivalente a otras “cualidades no numéricas” (como el color, el tamaño, etc.), así como qué esquemas y qué coordinaciones de esquemas resultan más relevantes para la adquisición del número, podríamos proponer un ejemplo de aprendizaje de las nociones numéricas que, a grandes rasgos, podría ser el siguiente:

Tomemos un conjunto de seis parejas idénticas de animales, cada pareja de un color distinto y de un tamaño tal que cada uno de los animales pueda caber en un cubo de 4 cm. de arista.

Tomemos también doce cubos de 5 cm. de arista y con el borde pintado del mismo color que los animales, de modo que a cada pareja de animales le corresponda una pareja de cubos con el borde pintado del mismo color que los animales (a una pareja de animales amarillos, le corresponden una pareja de cubos con su borde pintado de amarillo...) y tres recipientes de capacidad equivalente a cinco de los cubos anteriores, dos de ellos idénticos (A y A') y el tercero más estrecho y, por tanto, más largo (B); con la condición de que si uno de los dos recipientes idénticos (A o A') se encuentra lleno (5 cubos de capacidad) y el segundo (B) sólo contiene cuatro unidades (4 cubos de capacidad), la altura del líquido es todavía ligeramente superior a la del recipiente más ancho que se encuentra lleno.

A continuación se presentarán al niño cinco animales distintos, pidiéndole que dé a cada uno de los animales un depósito de agua (cubo), para ello podemos contarles un cuento cuya base esté en la necesidad que los animales tienen de agua, incitándole, de esta manera a llenar los depósitos con agua para cada uno de los animales y con la misma cantidad para que no se enfaden o discutan sobre quién tiene más agua (se utilizará un recipiente con el borde pintado del mismo color que la piel del animal). Una vez realizada esta primera actividad se realizan preguntas de pertenencia para reforzar la correspondencia (¿dónde está el agua del…?, ¿de quién es el agua de este depósito?, etc.), si presentaran alguna dificultad para establecerla se les induce a que introduzcan cada animal en su depósito.

Luego, se les pasa a contar una historia conducente a la necesidad de constituir un «poblado», por lo que habría que verter el agua de cada animal (cubo) en un gran depósito (A). Realizada esta nueva operación se vuelve a interrogar sobre la pertenencia del agua (¿dónde está ahora el agua de …?) y más tarde sobre el número de animales que pueden beber del depósito que pertenece al «poblado» (si hubiera problemas para la cualificación numérica se introducen los animales en el depósito), haciéndole llegar a la conclusión que el «todo» formado está compuesto por «cinco partes» y sólo cinco.

A partir de aquí se continúa con acciones de adición y sustracción: y si viene un nuevo animal ¿que tendrá que hacer para poder beber del depósito del «poblado»?, y si se va el… ¿qué tendrá que hacer para no pasar sed?, etc.

Una siguiente fase consistiría en constituir una situación análoga que condujera a tener ante sí dos «poblados» idénticos: “Mira, ahora vamos a dejar este «poblado» aquí y haremos un nuevo «poblado» con animales idénticos a estos”. Esto nos conducirá a tener dos depósitos de cinco unidades de capacidad en cada uno.

Partiendo de esta situación continuamos con una narración que nos permita añadir o quitar unidades del depósito preguntándoles siempre por la comparación entre los depósitos de los dos «poblados», de manera que su acción no entrará nunca en conflicto con su percepción puesto que cuando se añaden unidades aumenta el nivel del líquido en el recipiente y cuando se retiran disminuye, pero nosotros le preguntaremos siempre sobre el número de animales que pueden beber agua de los recipientes. Por ejemplo, una vez retirado un animal de uno de los «poblados», conservando los cinco animales en el otro, preguntaríamos: ¿Cuántos animales pueden beber en este «poblado» (A)? ¿cuántos animales pueden beber en este otro (A')?, entonces ¿dónde hay más agua, en este «poblado» (A) o en este (A'), reiterando las preguntas iniciales; ¿cuántos animales me has dicho que pueden beber aquí (A)? ¿y aquí (A')?.

La siguiente situación sería idéntica a la anterior, pero pidiéndole el establecimiento de la correspondencia, no sobre los elementos, sino sobre los desplazamientos del líquido: “Si el… se lleva su agua, ¿hasta dónde llegaría el agua del depósito?. Pidiéndole siempre las razones: ¿por qué crees tú que llegaría hasta aquí?.

Esta situación de anticipación física, la trasladaremos, inmediatamente, a una situación de anticipación numérica: Y si el… se lleva su agua ¿cuántos animales podrían beber entonces del depósito?, ¿dónde estaría el agua del…?.

Finalmente, le contaríamos una historia que justificara que los animales del poblado (A') van a llevar su agua a otro depósito (B), con lo que, una vez trasladada, la altura alcanzada es sensiblemente mayor. Entonces se le pregunta si hay más agua en A o en B. Si la respuesta es B, se le interroga sobre el número de animales que pueden beber en cada depósito (si fuera necesario se introducirían los animales en sus depósitos y se vaciaría el agua junto con los animales, de manera que hubiera una percepción del número de animales, al igual que la hay de la altura del agua). Si sigue manteniendo que A < B se le pide que anticipe cuántos cubos se podrían llenar con el agua de A y cuántos con el agua de B. Siempre se le pedirá que justifique su respuesta.

Como la justificación vendrá dada siempre en términos perceptivos, se le plantea una nueva situación en la que se parte de los dos depósitos con las cinco unidades. Se le vuelve a interrogar por la igualdad y, lógicamente, seguirá manteniendo su posición de que A < B por que en B "es más alto". Entonces se le dice: "mira, el animal… (del depósito B) se marcha y, por tanto, se lleva su agua", ¿cuántos animales pueden beber de este depósito (A)? ¿cuántos pueden beber de este otro?. Esta nueva situación hace que entre en conflicto lo numérico y lo perceptivo $A_5 > B_4$, pero A_L es todavía menor (menos alto) que B_L. Si se inclina por la solución numérica, se le dice, pero tú habías dicho que "donde es más alto hay más". Lo que le lleva a situar la evaluación numérica en su justa medida. Si todavía se inclina por la solución de la altura, buscaríamos un nuevo recipiente en dónde tuviéramos la misma situación pero en la relación 3 contra 5, es decir, A con cinco unidades y B con tres unidades, pero la altura en B algo ligeramente mayor que la altura en A.

De esta manera seguiríamos procediendo hasta afianzar la evaluación numérica (el número) como un elemento fundamental a la hora de discretizar un continuo, es decir, como instrumento de asimilación de lo real.

Hasta este momento hemos planteado siempre las actividades con carta de naturaleza individual, pero nada está más lejos de la realidad de nuestro pensamiento que postular que el proceso de enseñanza y aprendizaje del número y las nociones numéricas de base (como las de cualquier otro contenido matemático o de otras áreas curriculares) deba realizarse a partir de actividades individuales, antes bien, todas las actividades deberían plantearse según una estructura de tarea que favoreciera la interacción entre iguales y la organización cooperativa del aula. El proceso de interacción entre iguales es fundamental para la adquisición del conocimiento y, tanto desde planteamientos sustantivos y teóricos de carácter general -bien sea desde la perspectiva de la Escuela de Ginebra (conflicto socio-cognitivo), bien sea desde la perspectiva vigotskiana (zona de desarrollo potencial)-, como desde planteamientos específicos (investigaciones específicas en aprendizaje cooperativo) se pone de manifiesto la rentabilidad de la interacción entre iguales. En este sentido, una buena parte de nuestra investigación se ha centrado en el trabajo cooperativo en el aula, abarcando, tanto aspectos generales, como aspectos aplicados al ámbito de la enseñanza de las matemáticas.

Consideraciones finales.

La elaboración de actividades de aprendizaje para la adquisición del número y los esquemas lógico-matemáticos de base, no es una tarea fácil, pero además, el profesor se encuentra con una serie de limitaciones que van desde su propia e inadecuada formación, hasta defectos del sistema, pasando por tópicos erróneos y tradiciones nefastas.

Comenzando por estas últimas podemos observar que existe una peligrosa tradición en la educación de no sistematizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, de manera que se genera lo que César Coll denominó como un problema de "opinionitis" y que es debido a la asistematización del proceso instruccional. En efecto, cuando un ingeniero explica cómo se construye un puente, un arquitecto cuánto cemento se necesita para establecer el armazón de un determinado edificio o un cirujano cómo se efectúa una laringectomía, sólo otro técnico, equiparable a él en conocimientos, opina sobre el tema; esto se debe, sin lugar a dudas, a que la construcción de un puente o un edificio, o la realización de una determinada intervención quirúrgica, son procesos altamente sistematizados. Sin embargo, cuando se habla de instrucción, cada individuo es un maestro y se siente con el derecho de decir, qué, cuándo y cómo se debe enseñar un contenido instruccional a un alumno determinado[23].

Esta falta de sistematización se manifiesta, en primer lugar, desde el comienzo del diseño instruccional, con la definición del contenido objeto de instrucción. Parece como si los profesionales de la educación dieran por sentado que existe un acuerdo universal, y una definición igualmente ecuménica, para todos los contenidos instruccionales. Es algo así como decir: ¿qué es el número?, pues el número es el número; ¿qué es sumar?, pues sumar es sumar; etc. En segundo lugar, la falta de sistematización se sigue produciendo a la hora de la planificación de los contenidos. Por ejemplo, es poco frecuente encontrar diseños instruccionales que lleven incorporado una secuenciación lógica o un análisis de tareas. En tercer lugar, cuando se postula que "se parte de las ideas iniciales del sujeto", no se tiene en cuenta el nivel de desarrollo de los esquemas implicados en la adquisición y construcción de los contenidos, sino de los conocimientos académicos que el sujeto 'parece' poseer. De hecho las evaluaciones se centran en las acomodaciones del sujeto (ejecución) y nunca en las asimilaciones del sujeto (comprensión)[24]. En cuarto lugar, las metodologías de intervención en el aula o están desfasadas (parece como si las investigaciones psicoeducativas no llegaran nunca a la situación real del aula) o se encuentran desvirtuadas (por ejemplo, cuando se dice que se está trabajando con una metodología cooperativa, se observa una profunda confusión entre el trabajo en grupo y el trabajo cooperativo).

Por último, pocos diseños se insertan en un paradigma claro y, cuando dicen insertarse en uno, es frecuente encontrar una ausencia total o una interpretación errónea de los principios paradigmáticos que lo configuran. En este sentido, los profesionales de la educación parecen presentar un acuerdo, casi unánime, acerca de que el paradigma constructivista es el que mejor puede dar cuenta de los procesos de enseñanza y aprendizaje que se producen en las aulas; sin embargo, la realidad nos permite constatar que el aprendizaje de los saberes seleccionados por la cultura no constituyen una fuente de socialización y de construcción de una identidad personal (lo que contradice el primer nivel de jerarquía de la opción constructivista que postula que los contenidos culturales deben ser reconstruidos por cada individuo dando lugar a un ser diferenciado y único en el contexto de una determinada cultura y sociedad). Igualmente, encontramos análisis efectuados desde la perspectiva de las relaciones del profesor con los alumnos o de las relaciones del alumno con los contenidos, incluso de las relaciones de los alumnos entre sí, pero desde un posicionamiento constructivista la unidad de análisis la constituye el triángulo didáctico (profesor-alumnos-contenido) y esta unidad de análisis es, en tanto que unidad, indisociable (luego, tampoco desde los planteamientos del segundo nivel de jerarquía de la concepción constructivista se cumplen los planteamientos de los diseños instruccionales). Finalmente, desde los posicionamientos constructivistas que emanan del tercer nivel de jerarquía el aprendizaje se entendería como un proceso de construcción de significados sobre los contenidos escolares y de atribución de sentido a esos mismos contenidos y al propio hecho de aprender y no pensamos que esta sea la situación por la que atraviesan nuestras aulas, por el simple hecho de que, por ejemplo, el constructivismo utiliza el constructo de **esquema de conocimiento**[25] para referirse a los significados o representaciones que posee una persona acerca de una parcela de la realidad y en un momento determinado de su historia y, por tanto va a definir la construcción de significados como un proceso de revisión, modificación, diversificación, coordinación y construcción de esos esquemas de conocimiento, nada más lejos de lo que, en la realidad, se está haciendo en las aulas.

En este sentido hemos de tener en cuenta que, en el momento actual, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas desde la perspectiva de un paradigma constructivista, es un deseo universalizado que emana desde todas nuestras instancias educativas y que intenta plasmarse tanto desde la perspectiva del macrodiseño instruccional (esferas de decisión política), como del microdiseño (escuelas y aulas). Sin embargo, cuando nos acercamos a estos ámbitos de decisión instruccional, en sus distintos niveles, nos encontramos con planteamientos teóricos correctos pero de difícil traducción al lenguaje del aula (el triángulo interactivo constituye la unidad de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje) o con frases grandilocuentes de difícil interpretación para el maestro (en la construcción del conocimiento en el aula hay que tener en cuenta el papel mediador de la actividad mental constructiva del alumno). Desde esta perspectiva, podemos observar en nuestras aulas “planteamientos constructivistas” que ignoran la unidad lógica y psicológica del triángulo interactivo, “metodologías constructivistas” que ignoran la actividad mental del alumno o “análisis de tareas constructivistas” en donde la estructura lógica y psicológica de las matemáticas son profanadas de la forma más impune que uno pudiera imaginar, etc. Esto denota que, pese a la buena voluntad y al enorme esfuerzo que desarrollan en su autoformación, nuestros maestros no han sido formados para estar “a la altura del paradigma constructivista”.

Otro *handicap* con el que se suele encontrar el profesorado, sobre todo de los niveles educativos inferiores es un conjunto de tópicos que desvirtúan el proceso de enseñanza y aprendizaje desde una perspectiva logocéntrica. En este sentido, cuando se habla de conocimiento lógico-matemático, es frecuente encontrar en los manuales de Educación Infantil expresiones que son «verdades a medias» (y ya se sabe que la peor mentira es una verdad a medias) como, por ejemplo, “el color es una característica de tipo cualitativo o cualidad… (y) el número de objetos de una colección es una característica de tipo cuantitativo, o sea, se puede cuantificar o medir”. Pues bien, si tenemos un ‘conjunto' o ‘grupo' de objetos (A) constituidos por seis figuras geométricas rojas, otro ‘conjunto' o ‘grupo' de objetos (B) constituido por cuatro figuras geométricas rojas, y un tercero (C) constituido por seis figuras geométricas azules, tenemos: A = B (haciendo abstracción de la cualidad ‘número'); A = C (haciendo abstracción de la ‘cualidad' color) y B = C (haciendo abstracción de las ‘cualidades' color y número), de manera que podríamos calcular la unión de A, B, y C (A **U** B **U** C = {figuras geométricas}). De la misma manera A ≠ B (porque la ‘cualidad' número difiere en ambos conjuntos); A ≠ C (porque la ‘cualidad' color difiere en ambos conjuntos) y B ≠ C (porque, tanto la ‘cualidad' de número, como la de color son diferentes). Es evidente, por tanto, que la cualidad número es equiparable a la cualidad color. En este sentido se puede decir que *el número tiene un carácter cualitativo*.

Por el contrario, la ‘cualidad' rojo puede ser «medida» (i.e. longitudes de onda) y puede ser «ordenada» (ser más rojo o ser menos rojo); por ejemplo no es extraño escuchar expresiones tales como “estás más rojo que un pimiento” que quiere significar que la persona en cuestión tiene una intensidad de rojo en el rostro mayor que la intensidad de rojo de un pimiento de ese color. Todas las cualidades de los objetos son susceptibles de medida (con algún tipo de instrumento y en algún tipo de escala de medida), porque cualquier continuo en lo real (la realidad es un continuo) es objeto de discretización en la mente.

Otra serie de tópicos hacen referencia a matizaciones, que no conducen a ninguna parte, como la clásica distinción, que encontramos en numerosas obras, entre conocimiento formal e informal, sobre todo en el campo del conocimiento lógico-matemático. Si nos paramos a reflexionar un poco nos daremos cuenta que conocer es saber hacer comprendiendo las razones. Esto es formal, diríamos que muy serio y muy formal, y eso es conocer, nos guste o no. Pues bien, no es difícil encontrar en la actualidad expresiones tales como: "los niños de estas edades utilizan mecanismos informales para solucionar situaciones problema que les planteamos en relación con situaciones de recuento (utilización de los dedos, movimiento de la cabeza) que poco a poco se formalizarán mediante la utilización del número". Pues bien, la referencia a los objetos y/o al cuerpo, no supone, en absoluto, la utilización de mecanismos o procedimientos informales, sino mecanismos o procedimientos psicológicos que dan cuenta del paso de la centración a la descentración (utilizando una terminología piagetiana) o de la subjetividad a la objetividad por el intermediario de la intersubjetividad (utilizando una terminología vigotskiana).

En efecto, admitamos o no el principio haeckeliano[26] de que la ontogénesis recapitula la filogénesis, todos los historiadores del pensamiento matemático están de acuerdo en aceptar la existencia inicial de unos *números corporales*. Estos números corporales comienzan siempre, y de manera muy especial, centrados en los dedos de la mano[27], lo que no parece una situación caprichosa de los hombre primitivos desde el momento en que, a partir de los trabajos iniciales de Gerstmann y el posterior diagnóstico diferencial efectuado por Kleist, sabemos que la *acalculia* va siempre asociada a una *agnosia digital*, por lo que estos autores llaman poderosamente la atención sobre la correlación íntima existente entre el reconocimiento de los dedos de la mano y las primeras adquisiciones del cálculo. No es, por tanto, de extrañar que los niños (como el hombre primitivo) «cuente con los dedos» (no «cuentan los dedos»).

El que los procedimientos iniciales de cálculo tengan un origen neurológico no quiere decir, de ninguna de las maneras, que sean procedimientos informales de cálculo. Como no quiere decir que los conocimientos matemáticos del hombre primitivo, por el hecho de tener un origen práctico, fueran conocimientos matemáticos informales. Herodoto, en un conocido pasaje de su *Historia*, decía:

"El rey de Egipto dividió el suelo del país entre sus habitantes, asignando lotes cuadrados de igual extensión a cada uno de ellos y obteniendo sus principales recursos de las rentas que cada poseedor pagaba anualmente. Si el río arrasaba una parte del lote de un habitante, éste se presentaba al rey y le exponía lo ocurrido, a lo cual el rey enviaba personas a examinar y medir la extensión exacta de la pérdida y más adelante la renta exigida era proporcional al tamaño reducido del lote".

El ladrillo con que el hombre primitivo construía sus casas y sus tumbas, aportó la noción de ángulo recto. El concepto de *línea* (y su nombre) deriva de la forma de la fibra del lino. Otros muchos conceptos matemáticos tienen su origen en movimientos (ya de las danzas primitivas, ya del caminar de los astros en el cielo…).

El hecho de que la noción de proporcionalidad, a la que hacía referencia Herodoto, venga de la necesidad de aplicar una ley con justicia, la de ángulo recto de un ladrillo, la de línea de una fibra textil, etc., no permite que nadie llame informales a los conocimientos que debemos a aquellos que nos precedieron históricamente.

Otro tópico que daña bastante el "hacer matemático" es el de verdad absoluta (a las matemáticas se les llama ciencias exactas). Dejemos que sean los propios filósofos de la matemática los que nos desgranen esta cuestión. En este sentido, Krieger postula un conjunto de afirmaciones bastante esclarecedoras:

Los teoremas matemáticos, dice Krieger, "son objetos interpretables culturalmente, lo mismo que lo pueden ser las obras de arte. Al tomarse separados del contexto cultural, los teoremas se enfocan de modo trascendente y se ven como analíticos o verdaderos por su ser, dada la verdad por la demostración que hace el matemático (como el artista su obra); o sintéticos y se les admite como verdaderos por su correspondencia y localización en la historia y el mundo".

Está muy claro que las matemáticas son un instrumento de transmisión de la cultura, por tanto las verdades matemáticas son verdades en el espacio y en el tiempo y nunca verdades absolutas.

En otro pasaje de su artículo, Krieger nos dice que "la matemática es un instrumento y un oficio. Como instrumento es útil porque se adapta al material que encuentra, es decir, al mundo natural y a las ciencias. Pero, a la vez, ese material también se adapta para ponerse de acuerdo con las capacidades matemáticas. Un acuerdo nunca perfecto con lagunas entre ambos polos que obliga a realizar modificaciones en la matemática para ponerse de acuerdo con el material que la entorna; pero también el mundo, el material, tiene que modificarse para esa adaptación".

Igualmente las matemáticas son un instrumento de asimilación para acomodarnos al mundo que nos rodea, es decir, para conferir un significado a lo real. Cuanto más y más poderoso sea este instrumento de asimilación, se le podrán conferir a la realidad significados cada más ricos. La utilidad de las matemáticas está, por tanto, en su poder para explicar el mundo, tratar de desconectar las primeras del segundo será, por tanto un error aberrante.

El maestro que enseña matemáticas debe conectar estas con la realidad para no parecerse al matemático que describe P. Simons: "el matemático *qua* matemático no le parece esencial reflexionar acerca de lo que hace y de lo que dice", con lo que, instalado en el mundo de las ideas, se transforma en un platónico que maneja objetos abstractos separados del espacio y del tiempo y totalmente ajenos a la realidad que circunda al sujeto que aprende.

Finalmente Krieger postula que las matemáticas, como oficio de docente, debe partir del hecho que “la enseñanza de la matemática contiene un ímpetu, lo que se califica de motivación, que no está escrito en parte alguna pero se transmite en la pizarra o el papel, en el planteamiento de tareas y actividades individuales o colectivas. La motivación proviene de la ejemplificación, de la anécdota… y esta motivación es de tipo más bien general y cultural aunque se utilice una jerga semitécnica de la subcultura propia del matemático”.

La única enseñanza válida de las matemáticas, sea cual sea el prisma que se utilice, debe partir de la realidad y debe tener como destinataria esa misma realidad.

Desde que Paul Benacerraf publicara su célebre dilema[28] conocemos los cuatro elementos esenciales del saber matemático:

1. El conocimiento matemático se basa en una posición epistemológica (que se ha dado en llamar *epistemología del sentido común*) de naturaleza causal.

2. El conocimiento matemático exige la interacción entre el sujeto y el objeto.

3. Los objetos matemáticos son entidades existentes.

4. Los objetos matemáticos no pueden ser entidades abstractas y han de estar localizados espacio-temporalmente.

Esto nos lleva a concluir que el número, en cuanto objeto matemático, existe (luego es un contenido instruccional), que no es una entidad abstracta (luego hay que concretizarlo), que no puede conocerse sino mediante la interacción del sujeto con él (luego debe conocerlo en acción) y que la única manera de conocerlo es mediante mecanismos causales (luego no puede desligarse de la realidad).

---

[1] Piaget, J. (1975): *Introducción a la epistemología genética. : El pensamiento matemático*. Buenos Aires: Paidós; p. 111.

[2] Serrano, J.M.; Carranza, J.A. y Roca, M.D. (1985): El papel de la transitividad y de las inferencias transitivas en la adquisición del concepto de número. En la Pedagogía Operatoria Avui. Barcelona: Ayuntamiento de Barcelona, 555-564.

[3] No olvidemos que el número puede ser considerado "clase de clases" (Russell y Whitehead, 1903), lo que supone que ante la pregunta ¿cuántos animales hay en el conjunto anterior?, la respuesta sería *doce*, y la razón podría venir dada por el siguiente argumento: esos animales pueden ser puestos en correspondencia con los mariscales de Napoleón, los apóstoles del Cristo, los meses del año, los signos del Zodíaco, etc. y la clase que engloba todas estas clases (desde la perspectiva o desde la propiedad *número*) recibe el nombre de *doce*.

[4]***Función (a)***: dirección sujeto!objeto (asimilación); ***función (b)***: dirección sujeto"objeto (acomodación); ***función (↔)***: equilibración; ***As***: esquemas lógico-matemáticos de clasificación y/o seriación; ***Fs***: forma que se le confiere a los objetos matemáticos (aplicación del esquema); ***Ro***: resistencia de los objetos numéricos a ser clasificados y/o seriados; ***Mo***: significado que los objetos numéricos presentan para el sujeto.

[5] "A través de una larga y penosa evolución… el hombre ha terminado por hacerse experto en dos técnicas que formarán en lo sucesivo parte de su «equipo mental»: el emparejamiento y el recuento" (Boll, 1974; pp. 8-9).

[6] Contar es atribuir numerales, en un orden estable e irrelevante, a los elementos de un conjunto de objetos, de manera que cada numeral se corresponda con un objeto y sólo uno y cada objeto se corresponda con un numeral y sólo uno.

[7] Precisamente, la potencialidad de un esquema viene determinada por la variedad de contenidos a los que se puede aplicar; por ejemplo, durante el periodo sensoriomotor, los esquemas (de acción) son formas que sólo se pueden aplicar a un contenido real y presente; durante el periodo de preparación y organización de las operaciones concretas los esquemas (simbólicos o representacionales) son formas que actúan sobre contenidos reales (presentes, simbólicos o simbolizados), es decir, actúan tanto sobre la realidad, como sobre representaciones de lo real; finalmente, durante el período de las operaciones formales, los esquemas (formales) pueden ser, alternativamente, formas y contenidos y, por tanto, pueden actuar sobre lo real, sobre representaciones de lo real y sobre los propios esquemas. Supongamos un esquema representacional que llamaremos "opuesto" y representaremos por (-) y la representación numérica de un conjunto formado por cinco elementos (5); entonces podemos decir que el opuesto de 5 es -5. Esta acción que, como es interiorizada y reversible, llamaremos ***operación***, supone la aplicación de un esquema a la representación de una realidad, lo que nos8 lleva a concluir que la construcción de los números negativos se debe producir durante el periodo de las ***operaciones concretas***. Supongamos que el mismo esquema (opuesto) pudiera actuar sobre sí mismo; entonces estaríamos ante la siguiente situación -(-), que habría que definirla como el «opuesto» del «opuesto» y cuyo resultado sería que "el opuesto del opuesto es el mismo elemento", traducido en términos matemáticos y con lenguaje escolar: menos por menos = más. Por tanto, la "regla de los sign8os" es una ***operación formal***.

[8] Como no hay acción sin reacción hablaremos de interacción sujeto↔objeto.

[9] Aplicar una unidad funcional de conducta o esquema (en este caso el «esquema de conteo») a la realidad.

[10] Durante la etapa preconceptual la rigidez de los esquemas simbólicos o representacionales hace que nos encontremos con conductas de clasificación tales como **£ £ ™ £ ™ ™ £** …y cuando le preguntamos al niño "¿estos dos se parecen?" (1º y 2º), nos responde "sí, porque son cuadrados", entonces, señalando al 3º, le decimos ¿y éste, es cuadrado?, a lo que el pequeño nos responde, ¿no, es azul como éste (señalando al 2º). Esto se debe a que, debido a la rigidez que los esquemas representacionales de semejanza, que posibilitarán la construcción de las clases, presentan en este momento, el pequeño sólo puede proceder de la siguiente manera: Toma un cuadrado, en este caso 'rojo' y piensa "tengo que poner a continuación uno como éste", y pone otro cuadrado, en este caso, 'azul'. Una vez puesto, el cuadrado rojo se 'aleja' en el espacio y en el tiempo y, por eso, cuando tiene que seguir procediendo, piensa "ahora tengo que poner uno como éste" y como es azul, busca una figura azul que, en este caso es un círculo. Y así continúa hasta agotar los elementos. Como se puede comprobar, el razonamiento del sujeto es ***transductivo*** (va de lo particular a lo particular) y, a falta de anticipación (el sujeto no se plantea, después de colocar los dos primeros elementos "voy a poner los cuadrados", porque entonces su razonamiento iría de 'lo particular a lo general' y, por tanto, sería inductivo), la colección que realiza carece de simultaneidad (sucesividad intra-colección).

[11] OO = observables en el objeto (cualidades del objeto); OS = observables en la acción (esquemas); CO = inferencias en el objeto (coordinación de cualidades); CS = inferencias en la acción (coordinación de esquemas); (a) = dirección sujeto!objeto (asimilación); (b) = dirección sujeto"objeto (acomodación).

[12] Esta situación la podríamos corroborar (si el nivel de desarrollo del sujeto lo permite) analizando la cuantificación de la inclusión bajo los criterios de forma y color, dándole, por ejemplo, al pequeño el siguiente material estructurado p p p *¢ ¢ ¢ ¢* y preguntándole: ¿Todos los triángulos son rojos?, ¿todos los cuadrados son rojos?, ¿todos los azules son cuadrados?. Si las preguntas en las que la clase abarcadora se define por el criterio forma son correctas y las que la clase abarcadora sea el color incorrectas, entonces tenemos garantizada la existencia de un "desfase" del criterio color con relación al criterio forma. Estaríamos ante lo que Hamilton llamaba la "falsa simetría del predicado". En efecto, como el criterio 'forma' presenta una 'potencia' mayor que el criterio 'color', en el razonamiento del sujeto es imposible que se le pueda aplicar el cuantificador **todos** al color -*todos* son los 'cuadrados' y *algunos* son (los) 'azules'-; por lo tanto, ante la pregunta ¿todos los azules son cuadrados? él responde que «no», porque también «hay cuadrados rojos»; es decir, ante la pregunta "¿todos los azules son cuadrados?" coloca el predicado en su 'justo lugar', desde la perspectiva de su razonamiento: "¿todos los cuadrados son azules?"

[13] Serrano, J.M. y Fernández, A. (1989): Clases lógicas y colectivas: ¿dos modos de interpretación de la realidad?. *Estudios de Psicología,38*

[14] Piaget, J. e Inhelder, B. (1975): *La génesis de las estructuras lógicas elementales*. Buenos Aires. Paidós

[15] Piaget, J. y Szeminska, A. (1975): *La génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Paidós.

[16] Los esquemas aditivos tuvieron que adquirir, en su momento, una gran movilidad para poder devenir en esquemas multiplicativos.

[17] Recordemos que una de las diferencias esenciales entre L.S. Vigotsky y J. Piaget es que, mientras que para el primero el desarrollo sigue al aprendizaje, para el segundo el aprendizaje sigue al desarrollo.

[18] Serrano, J.M.; Pons, R.M. y Serrano, M.J. (2005): Las operaciones intraproposicionales y el número. 5º Congreso Mundial de E.I.

[19] Aunque Piaget nació en Neuenburg (Neuchâtel) prácticamente toda su actividad docente e investigadora la realizó en Ginebra.

[20] Un ***hecho*** está constituido por piezas de información arbitrariamente. Un ***concepto*** es la representación mental genérica de un objeto, un hecho o un conjunto de objetos o de hechos que comparten, al menos, una característica común. Un ***principio*** es un conjunto de conceptos que permite explicar, relacionar o predecir lo real.

[21] La frase exacta de Jean le Rond d'Alembert es: "seguid, la fe vendrá después".

[22] Este término fue empleado por Karl Werner y designa el importante papel desempeñado por el 'carácter histórico' del hombre.

[23] Esto ocurre con otras profesiones en que el proceso está poco sistematizado, por poner un ejemplo, en nuestro país, cada español, no sólo es maestro, es también entrenador de fútbol, crítico taurino, etc.

[24] Llegados a este punto hemos de decir que pocos diseños instruccionales postulan un proceso de evaluación continua; casi todas las evaluaciones que se efectúan son de naturaleza puntual.

[25] Este constructo se fundamenta en el concepto piagetiano de esquema y la noción de esquema que emana de las teorías del procesamiento humano de la información pero las trasciende y las supera.

[26] Ernst Haeckel enunció, en 1868, lo que se conoce con el nombre de **ley fundamental biogenética** según la cuál, hay un paralelismo entre la ***ontogénesis*** (desarrollo del individuo de una especie) y la ***filogénesis*** (desarrollo de la correspondiente especie). Como la ontogénesis recapitula la filogénesis esta teoría se conoce con el nombre de **teoría de la recapitulación** que, desarrollada inicialmente por Johann Friedrich Meckel, alcanzó gran predicamento con la publicación del *Origen de las especies* de Darwin.

[27] La palabra **dígito** utilizada para referirnos a las cifras 1 a 9, ambas inclusive, hace referencia a la expresión romana *numerare per digitos* (contar por los dedos).

[28] "Lo que parece necesario para la verdad en la matemática hace imposible el conocimiento de esa verdad; lo que haría posible el conocimiento matemático hace imposible la verdad del mismo".